気象情報解析特論第7回

特異値分解（理論編）

神山 翼, @t_kohyama,
tsubasa@is.ocha.ac.jp,
理3-703

今日は，固有値分解を非正方行列に一般化する方法を学びます

特異値分解（理論編）

非正方行列Xの特異値分解とは
二つの直交行列と1つの対角行列の積に分解すること

気象データ解析の文脈ではEOF解析のほか
最大共分散解析（MCA）で使うことが多い

来週最大共分散解析（MCA）を行うための
数学的準備をすることが目標

特異値分解（SVD）とは

正方行列の固有値展開

$$XE = E\Lambda \iff X = E\Lambda E^T$$

固有ベクトル
を並べた直交行列

固有値を対角成分に並べた行列

特異値分解：**M行N列の**行列Xについて

$$XV = U\Sigma \iff X = U\Sigma V^T$$

特異ベクトル
を並べた直交行列
U: MxM, V: NxN

特異値を対角成分に並べた行列
Σ：MxN

特異ベクトル・特異値の求め方

$$X = U\Sigma V^T$$

Uは，XX^Tの単位固有ベクトルを
固有値の大きい順に左から並べた行列

Vは，X^TXの単位固有ベクトルを
固有値の大きい順に左から並べた行列

特異値は，XX^TとX^TXに共通する
非ゼロ固有値の平方根

実際に試してみよう

```
U, S, VT = np.linalg.svd(X)
```

$$X = U\Sigma V^T$$

```
[[1. 2. 3.]
 [4. 5. 6.]]
```

```
[[-0.3863177 , -0.92236578],
 [-0.92236578,  0.3863177 ]]
```

```
[[9.508032  , 0.        , 0.        ],
 [0.        , 0.77286964, 0.        ]]
```

```
[[-0.42866713,  0.80596391,  0.40824829],
 [-0.56630692,  0.11238241, -0.81649658],
 [-0.7039467 , -0.58119908,  0.40824829]]
```

気象データ解析の文脈では何を意味するか

共分散行列C = XX^T/Nを特異値分解すれば
UもVもEOFを並べた行列

なぜなら，**共分散行列は正方行列**ゆえ
特異値分解と固有値分解は一致するから

$$XE = E\Lambda \iff X = E\Lambda E^T$$

$$XV = U\Sigma \iff X = U\Sigma V^T$$

E=U=V，Λ＝Σとなる

データ行列Xそのものを特異値分解すると
UはEOFを，VはPC時系列を並べた行列

データ行列　EOF　PC時系列

$$X = U\Sigma V^T$$

$\Sigma\Sigma^T = \Lambda N$ すなわち $\sigma_i^2 = \lambda_i N$ の関係
（ただし σ_i はXのi番目の特異値，
λ_i はCのi番目の固有値）

二つのデータ行列XとYの共分散行列

$C_{XY}=XY^T/N$を特異値分解

＝最大共分散分析（MCA)

EOFは「1変数の卓越した変動」を探す解析

MCAは「2変数の関係が深い変動」を探す解析

これが一番大事なので

次週1回分使います…

今日は，固有値分解を非正方行列に一般化する方法を学びます

特異値分解（理論編）

非正方行列Xの特異値分解とは
二つの直交行列と1つの対角行列の積に分解すること

気象データ解析の文脈ではEOF解析のほか
最大共分散解析（MCA）で使うことが多い

来週最大共分散解析（MCA）を行うための
数学的準備をすることが目標

本日の導入パートは以上です。
何でも良いので渡した紙に
授業に関係のあるコメントを
してください（出席代わり）。

コメント拾いが終わったら,
早速今日のプログラミングに進みましょう。