

# 生物対流の密度不安定性モデルにおける パターン形成の数値シミュレーション

理学専攻・情報科学コース 1740665 皆川 晶子（指導教員：河村 哲也）

## 1. はじめに

鞭毛藻を含む数種の微生物は、培養液の表面に特徴的な多角形のパターンを作ることが知られている。この現象は熱対流に似ていることから生物対流と呼ばれている。

微生物クラミドモナスによる生物対流では、一度形成された対流パターンが突如崩れ、対流パターンがより細かいものへと遷移する現象が報告されている<sup>(1)</sup>。鹿毛らによる実験において、微生物のパターンを上から見た様子はFig.1<sup>(1)</sup>、容器を横から見たときのパターンはFig.2<sup>(1)</sup>の様に観測された。この図で濃く見えている部分は微生物が集まり下降している部分、薄く見えている部分は上昇している部分を表している。

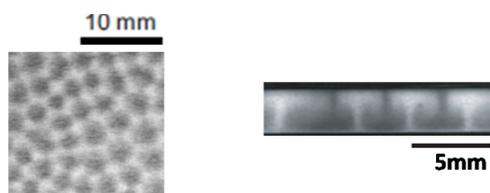


Fig.1 Horizontal observation<sup>(1)</sup>

Fig.2 Vertical observation<sup>(1)</sup>

対流パターンは、容器内の微生物数や容器の大きさ、微生物の遊泳速度などの物理量によって変化することが予想される。生物対流に類似した現象である泡対流においては、これらの物理量による対流パターンの変化について詳細に調べられている<sup>(2)</sup>。しかし、生物対流に該当するパラメータ領域についてはまだ明らかにされていないことが多い。そこで本研究では、2次元生物対流のパラメータ領域での対流パターンについて、「密度不安定性モデル」<sup>(3)</sup>を用いた2次元数値シミュレーションを行い、レイリー数 $Ra$ 、プラントル数 $Pr$ 、シュミット数 $Sc$ の3つの無次元パラメータにより、対流パターンの変化を解析する。

## 2. 生物対流の密度不安定性モデル

生物対流が熱対流に類似したメカニズムで起こっていると考え、流体力学的にモデル化したものが Fig.3 に示す「密度不安定性モデル」である。

このモデルでは、微生物の走性（半重力走性）による上昇遊泳を対流の駆動力としている。微生物は周囲の水より重いため、培養液中にランダムに分布していた状態から上昇遊泳によって培養液上層に蓄積した後、密度の不安定性を生じて固まりをなして沈み始め、上昇する部分と下降する部分ができ対流セルが発生すると考えられている。

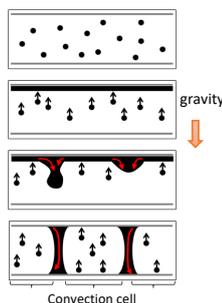


Fig.3 Density instability model

## 3. 計算方法および条件

### 3.1 基礎方程式

本研究では、微生物を個体数密度で表す密度不安定性モデルで2次元の計算を行った。このモデルの基礎方程式は連続の式、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式、微生物の個体数密度に関する移流拡散方程式から構成される。代表長さを計算領域の深さ  $H$ 、代表速度を微生物の上昇速度  $w_p$ 、代表密度を全空間に対する微生物の平均密度  $n_0$  として基礎方程式を無次元化すると以下のようになる。

連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

非圧縮性 Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Pr \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + Pr \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - Ra \cdot Pr \cdot n$$

微生物の個体数密度に関する移流拡散方程式

$$\frac{\partial n}{\partial t} + u \frac{\partial n}{\partial x} + (w + 1) \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{Pr}{Sc} \left( \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right)$$

これらの無次元方程式を流れ関数-渦度法を用いて解く。

ここで、 $u, w$  はそれぞれ流速の  $x, z$  成分、 $p$  は圧力、 $n$  は微生物の個体数密度を示す。また、レイリー数  $Ra$ 、プラントル数  $Pr$ 、シュミット数  $Sc$  はそれぞれ次式で定義される。

$$Ra = \frac{\rho_p - \rho_0}{\rho_0} \frac{g \cdot H^2}{w_p \cdot \nu} n_0, \quad Pr = \frac{\nu}{w_p \cdot H}, \quad Sc = \frac{\nu}{\kappa}$$

$\rho_p$  は微生物1個の質量密度、 $\rho_0$  は培養液の密度、 $g$  は重力加速度、 $\nu$  は動粘性係数、 $\kappa$  は拡散係数を表す。

対流パターンに関する各物理量は、これら3つの無次元パラメータに集約される。

### 3.2 計算条件

本研究では、無次元パラメータに対する対流セルの数を調べるため、空間について水平方向に十分に広くとる必要がある。ここでは容器の縦横比を1:15、格子数を  $24 \times 360$  及び  $48 \times 360$  とした。

無次元パラメータが対流パターンの形成に及ぼす影響を調べるため、 $Ra, Pr, Sc$  に様々な組み合わせの値を与えて数値計算を行った。 $Sc$  を  $10^3$  に固定し  $10^4 \leq Ra \leq 10^2$ ,  $10^{-3} \leq Pr \leq 10^2$  に変化させた場合及び  $Pr$  を1に固定し  $10^2 \leq Ra \leq 10^4$ ,  $10^1 \leq Sc \leq 10^6$  に変化させた場合の計算を行った。

時間については実時間に換算して初期状態から1000秒までの計算を行い、その時間範囲内での対流パターンの変化を観測した。

速度と圧力の境界条件は、底面と側面に no-slip 条件とし、液体表面も蓋を付けた場合を想定して no-slip 条件とした。微生物個体数密度の境界条件は、微生物の総数は変化しないという条件

$$\text{から、} \frac{\partial n_p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial n_p}{\partial z} = 0 \text{ とした。}$$

初期状態では微生物がランダムに分布し静止していたため、速度の初期条件は  $0$  [cm/s]、微生物の個体数密度の初期条件は乱数で与え、 $n_p = 5.0 \times 10^5 \sim 2.0 \times 10^7$  [cells/ml] 前後になるように調節した。

## 4. 結果

### 4.1 $Sc$ を固定した場合

$Sc$  を  $10^3$  に固定し、 $Ra$  及び  $Pr$  を変化させて計算した結果を以下に示す。Fig.4 は、縦軸を対流セルの数、横軸を  $Pr$  として対流セル数の関係を示した図であり、 $Pr$  が大きくなるに従って対流セルの数が減少する傾向が見られる。Fig.5 は縦軸を  $Ra$ 、横軸を  $Pr$  として対流セルの縦横比を示した相図であり、図中の縦横比は数値が1より小さいと縦長セル、大きいと横長セルである。対流セル

の時間変化に着目すると対流パターンはFig.5中に示すように「定常」、「非定常」、「崩壊」の3つに分類できる。各パターンの(A)流線、(B)渦度、(C)微生物数密度をFig.6-8に示す。

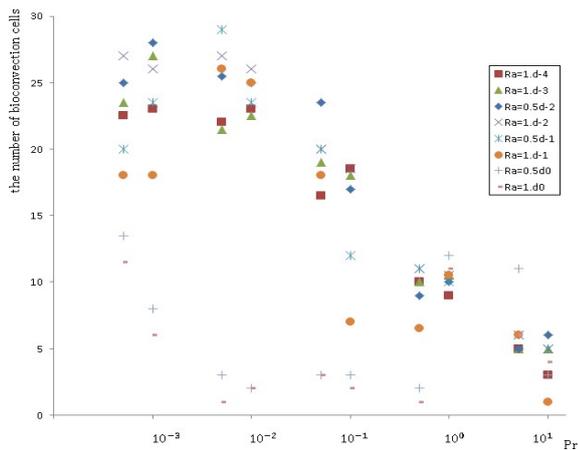


Fig. 4 the number of bioconvection cells ( $Sc=10^3$ )

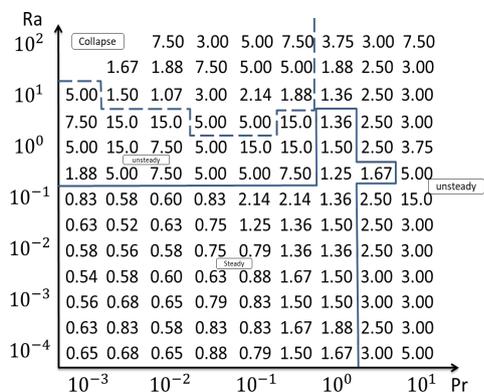


Fig. 5 Phase diagram of aspect ratio of the bioconvection as a function of Pr and Ra ( $Sc=10^3$ )

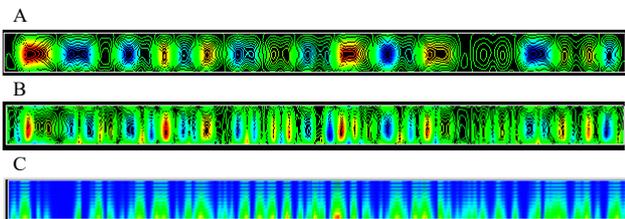


Fig. 6 Steady case ( $Ra=10^2, Pr=10^2, Sc=10^3$ )  
(A)Stream Line (B)Vorticity (C)Number density of microorganisms

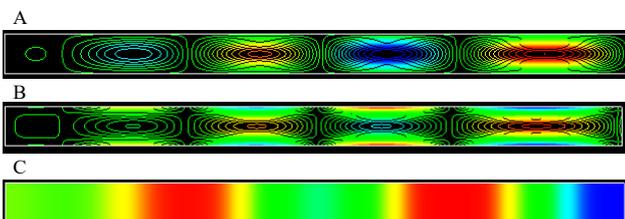


Fig. 7 Unsteady case ( $Ra=10^2, Pr=10, Sc=10^3$ )  
(A)Stream Line (B)Vorticity (C)Number density of microorganisms

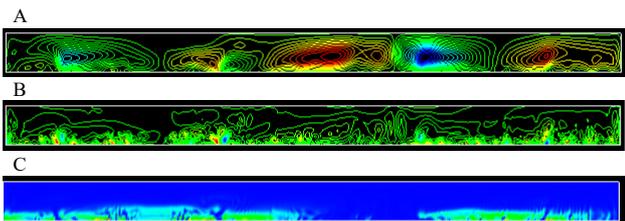


Fig. 8 Collapse case ( $Ra=10^2, Pr=10, Sc=10^3$ )  
(A)Stream Line (B)Vorticity (C)Number density of microorganisms

#### 4. 2 Pr を固定した場合

$Pr$ を1に固定し、 $Ra$ 及び $Sc$ を変化させて計算した結果、Fig.9の相図を得た。Fig.9は縦軸を $Ra$ 、横軸を $Sc$ として対流セルの縦横比を示しているが、対流パターンの決定には $Sc$ の値の及ぼす影響が大きいがわかる。対流セルの縦横比に注目すると、(1)1程度(正方形型)、(2)1より小さい(縦長型)、(3)1より大きい(横長型)、(4)崩壊の4つに分類できる。各パターンの流線をFig.10に示す。

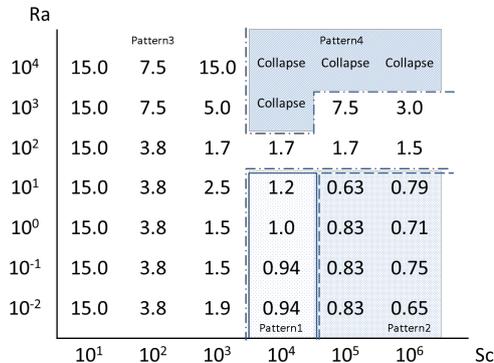


Fig. 9 Phase diagram of aspect ratio of the bioconvection as a function of Sc and Ra ( $Pr=1$ )

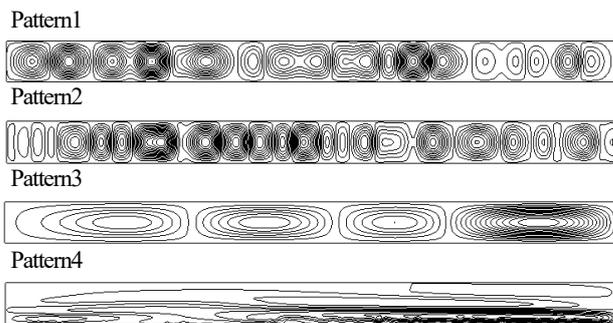


Fig. 10 Classification of the bioconvection ( $Pr=1$ )  
Pattern1:Square ( $Ra=10^0, Sc=10^4$ ), Pattern2:Vertical ( $Ra=10^1, Sc=10^5$ )  
Pattern3:Horizontal( $Ra=10^1, Sc=10^2$ ), Pattern4:Collapse( $Ra=10^4, Sc=10^5$ )

#### 6. まとめと今後の課題

2次元の生物対流を対象とした密度不安定モデルによって数値シミュレーションを行い、無次元パラメータに対する対流パターンについて調べ、以下の結果を得た。

- $Sc$ が一定の場合、 $Pr$ が小さいほど対流セルが細くなる傾向がある。対流セルの時間変化に着目すると「定常」「非定常」「崩壊」の3つのパターンに分類できる。
- $Pr$ が一定の場合、対流パターンの決定には $Sc$ の値の影響が大きく、 $Sc$ が大きくなると対流セルは細くなる。対流セルの縦横比に着目すると、「正方形型」「縦長型」「横長型」「崩壊」の4つのパターンに分類できる。

今後の課題として、現実に近い3次元への拡張が考えられる。

#### 参考文献

- (1) Azusa Kage, Chiharu Hosoya, Shoji A. Baba and Yoshihiro Mogami, "Drastic reorganization of the bioconvection pattern of Chlamydomonas : quantitative analysis of the pattern transition response", The Journal of Experimental Biology 216, 57-4566, (2013).
- (2) Keita Iga and Ryuji Kimura, "Convection driven by collective buoyancy of microbubbles", Fluid Dynamics Research 39 (2007) 68-97.
- (3) Childress, W.S., Levandowsky, M. and Spiegel, E.A., "Pattern formation in a suspension of swimming microorganisms: equations and stability theory", J. Fluid Mech., 69 (1975), pp. 591-613.