

双方向的流れを持つネットワークの最適構造

理学専攻・情報科学コース 山下璃紗 (指導教員：河村 哲也)

1 はじめに

生物的, 人工的輸送ネットワークの構造がループ構造, ツリー構造のどちらを選択するかどうかは, 長年の関心事項である. 文献 [1] では, 固定シンクでの最適構造はツリー構造が最適とされ, 変動シンクでの最適構造はループ構造が最適とされている. また文献 [2] では, 茎というソースが1点に固定されている葉脈ネットワークについて, 葉の種類によってツリー構造とループ構造の最適の方が選択されていると述べられている. しかし現在, 物質流のソースとシンクが固定されていない場合, ループ構造とツリー構造どちらを取るのネットワークとして最適かどうかについては未だ明らかになっていない.

そこで本研究では, 物質流ネットワーク上の全ての点がソースになり得る場合に焦点を当て, 最適なネットワーク構造を明らかにする. 具体的には輸送ネットワークにおいて, その構造を特徴づけるコスト関数 ([3]) を用いて各ノードがソースになる得る場合の最適ネットワークを求める. 特に最適構造が, ツリー構造になるか, ループ構造になるかに着目する.

2 モデル

本研究では, ある一点のソースからその他全ての点に流体を運ぶパイプネットワークを考える. 流体を輸送する各点をノード $m(m=0, \dots, N-1)$, 各地点を結ぶ経路をエッジとし, 各エッジは円柱形のパイプであるとする. また, ノード m と n をつなぐパイプの半径を r_{mn} , 長さを L_{mn} , 流量を J_{mn} とする.

各ノードには外から流入と流出があり, I_m をノード m からの流出とする ($I_m < 0$ なら流入). 流れの保存則から,

$$\sum_n J_{mn} = I_m \quad (1)$$

が成立する. ソースとなる点では $I = N - 1$, その他のシンクとなる点では $I = -1$ である. またポワズイユ流を仮定すると, 流量は圧力差に比例し,

$$J_{mn} = \frac{D_{mn}}{L_{mn}} (P_m - P_n) \quad (2)$$

が成立する. ここで D_{mn} は r_{mn} の4乗に比例し, エッジ mn の伝導性の大きさとする.

次のようなコスト関数を導入する.

$$\begin{aligned} H &= E + \alpha V \\ &= \sum_{m,n>m} \frac{L_{mn} \hat{J}_{mn}^2}{r_{mn}^4} + \alpha \sum_{m,n>m} L_{mn} r_{mn}^\mu \quad (3) \end{aligned}$$

E はエネルギー散逸率で流体を流すために必要なコスト, V はネットワークを維持するコストであり, ノードとノードをつなぐパイプの体積が太くなればなるほど大きくなる. α は正の実数であり V の E に対する重

みを決定する定数. $\mu = 1, 2$ の時, V はそれぞれ, 表面積, 体積に対応する. また, $\hat{J}_{mn} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k \in K} J_{mn}^{(k)2}}$ とし, $J_{mn}^{(k)}$ はノード k がソースの時のノード m からノード n への流量, K はソースになり得るノードの集合とする ($K = \{0, \dots, N-1\}$). 式 (3) より発展方程式を求め, $\dot{r}_{mn} = 0$ を解くと, 最適な太さ

$$r_{mn}^* = \left(\frac{4}{\alpha \mu} \hat{J}_{mn}^2 \right)^{\frac{1}{\mu-4}} \quad (4)$$

が求まる. 式 (4) を式 (3) に代入すると

$$H^* = \alpha^{\frac{4}{4+\mu}} \left(\left(\frac{\mu}{4} \right)^{\frac{4}{4+\mu}} + \left(\frac{4}{\mu} \right)^{\frac{\mu}{4+\mu}} \right) \sum_{m,n>m} L_{mn} \hat{J}_{mn}^{\frac{2\mu}{4+\mu}} \quad (5)$$

という, $r_{mn} = r_{mn}^*$ におけるコスト関数 H^* が求まる. 様々なネットワーク構造に対して $J_{mn}^{(k)}$ を求め, 式 (5) よりコストの大きさを調べ, そのコストが最も低いものを最適ネットワークとする.

3 数値計算結果

3.1 本研究で使用するネットワーク

本研究では3種類のネットワークを使用した (図 1). モデル (A) は二等辺三角形構造であり, 底辺の長さを l , 等辺の長さを底辺の β 倍である βl とした. $\beta < 1$ の時, 等辺より底辺の方が長く, $\beta > 1$ の時, 底辺より等辺の方が長い二等辺三角形となる. $\beta = 1$ の時正三角形となる. モデル (B) は円上に N 個 ($3 \leq N$) のノードを等間隔に並べた正 N 角形構造である. モデル (C) は7ノード構造で, 正六角形の真真中にノードを1つ配置した構造である.

これら3種類のネットワークモデルに対して数値計算を行った. 具体的には, まず, (i) ネットワークの各エッジに適当な初期値 r_{mn} を与える. 次に (ii) 式 (1) と (2) をガウスサイダル法を用いて解くことで流量 J_{mn} を求めた後, (iii) 式 (4) でその流量に対する最適な太さ r_{mn}^* を求める. 以降, r_{mn}^* が収束するまで (ii) と (iii) を繰り返す. 収束値が局所最適ネットワークであると期待される.

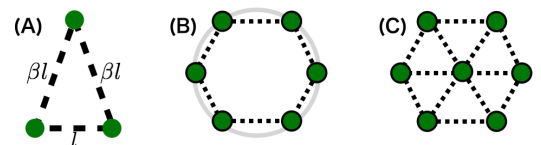


図 1: 本研究で使用するネットワークモデル. (A) 二等辺三角形構造 (B) 正 N 角形構造 (C) 7 ノード構造

3.2 二等辺三角形構造の数値計算

モデル (A) について数値計算を行い, どのような構造が最適かについて検討する. 考え得る構造は, 三辺

全て繋いだループ構造, 等辺のうち一边を切断したツリー構造, 底辺を切断したツリー構造の全部で3種類である。

数値計算の結果は図2のようになった。縦軸はコスト関数 H にある μ , 横軸は二等辺三角形の底辺の長さに対する等辺の長さ β である。実線は $\beta > 1$ の時は二等辺三角形の等辺のうち一边を切断したツリー構造とループ構造, $\beta < 1$ の時は二等辺三角形の底辺を切断したツリー構造とループ構造のコストの大きさ H^* が同じ時の μ の値を示している。点線は $\beta = 1$ で, 等辺と底辺の長さが逆転する境目を示す。実線と点線で区切られた4つの領域にそれぞれ示してある二等辺三角形構造は, その領域での最適構造である。 μ が大きければ大きいほどループ構造が最適だということが分かる。

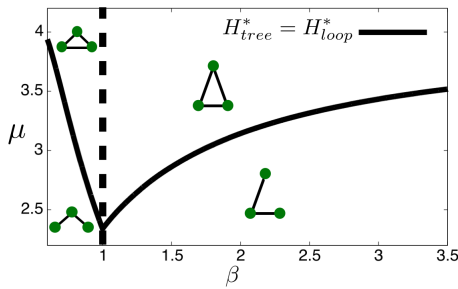


図2: パラメータ $\mu - \beta$ 空間における二等辺三角形構造の最適構造

3.3 正 N 角形構造の数値計算

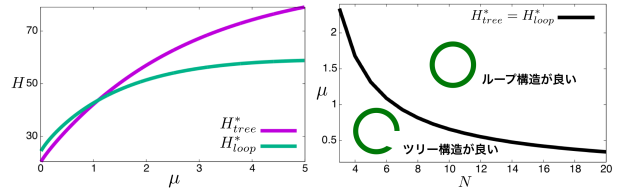
モデル (B) について数値計算を行い, どのような構造が最適かについて検討する。計算を簡単にするため, 最も近い隣合うノード同士のみを直線で繋ぐ場合を考える。したがって考え得る構造は, 正 N 角形の一边を切断したツリー構造と全てのエッジを結んだ正 N 角形のループ構造の2つである。

数値計算の結果は図3のようになった。図3aは縦軸がコストの大きさ H^* , 横軸がコスト関数 H にある μ である。紫の実線はツリー構造のコストの大きさを示し, 緑の実線はループ構造のコストの大きさを示している。図3bは縦軸がコスト関数 H にある μ , 横軸が何角形か決める N である。実線は正 N 角形構造のツリー構造とループ構造のコストの大きさ H^* が同じ時の μ の値を示している。実線で区切られた2つの領域にそれぞれ示してある構造は, その領域での最適構造である。 μ が大きければ大きいほど, ノード数 N が大きいほどループ構造が最適だということが分かる。

3.4 7ノード構造の数値計算

モデル (C) について数値計算を行い, どのような構造が最適かについて検討する。7ノード構造はエッジが12本あり, エッジの繋ぎ方は 2^{12} 通り存在する。このため全構造に対してコストの大きさ H^* を調べるのは困難なので, 最適構造になるのではないかと考え得る構造を5つに絞った(図4)。

数値計算の結果は図5のようになった。縦軸がコストの大きさ H^* , 横軸がコスト関数 H にある μ である。5本の実線はそれぞれの構造のコストの大きさ H^* を



(a) 2種類の正六角形構造における H^* の μ 依存性 (b) パラメータ $\mu - N$ 空間における正 N 角形の最適構造

図3: 正 N 角形構造に対する数値計算結果

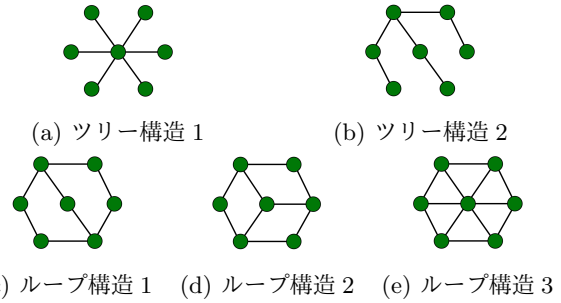


図4: 考え得る7ノード構造

示している。全体的に μ が大きくなるにつれてエッジを多く繋いだ構造, すなわちループ構造が最適になることが分かった。

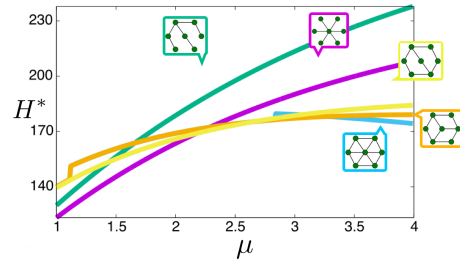


図5: 5種類の7ノード構造における H^* の μ 依存性

4 まとめと今後の課題

先行研究では固定ソース, 固定シンク, 変動シンクそれぞれの場合でツリー構造とループ構造どちらが最適かどうかについて調べられた。そこで本研究ではソースが可変な場合について調べたところ, 構造は α には依存しないが, μ によって最適構造がループ構造とツリー構造に異なることが分かった。今後は数値計算を用いて他のネットワーク構造についてや, 現存する様々なネットワークに適応するコスト関数も検討していきたい。

参考文献

- [1] Dan Hu and David Cai. Adaptation and optimization of biological transport networks. *Physical review letters*, Vol. 111, No. 13, p. 138701, 2013.
- [2] Eleni Katifori, Gergely J Szöllösi, and Marcelo O Magnasco. Damage and fluctuations induce loops in optimal transport networks. *Physical Review Letters*, Vol. 104, No. 4, p. 048704, 2010.
- [3] 中西智美. ロバストな輸送ネットワークの自己組織化モデル. 修士論文, お茶の水女子大学, 2018.