

ストークス流体中の結合回転子集団の協働ダイナミクス

理学専攻・情報科学コース 千葉友紀子 (指導教員:河村哲也)

1 はじめに

微生物は鞭毛や繊毛の集団運動を利用し遊泳する。これらの微生物は流体の慣性がほとんど効かない低レイノルズ数 (10^{-3}) の環境下で運動しており、流体を介した相互作用によって鞭毛同士は協調した運動を行っていることが知られている [1]。しかし、鞭毛の同期と遊泳の関係性についてはわかっていないことが多い。本研究では複数の鞭毛の同期と遊泳との関係性を明らかにするため、複数の鞭毛や繊毛の運動を模した簡単なモデルを作成し、そのダイナミクスを数値シミュレーションによって解析した。

2 モデル

3次元空間のストークス流体中における2次元平面上の運動を考える。本研究では [2] を参考に、1本の繊毛の運動を、半径 l の円軌道上を半径 a の球形の粒子が回転する回転子として表し、この回転子 N 個を隣接する回転子の軌道の中心間の距離を d として等間隔に水平方向に並べることで繊毛集団を表す ($a \ll d$, $l \ll d$ とする)。

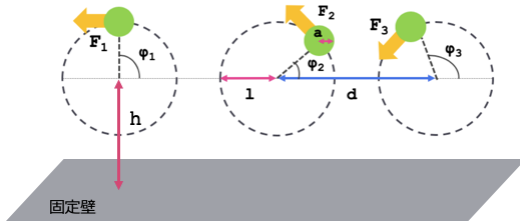


図 1: $N = 3$ の場合の概略図。

回転子 i の位相 ϕ_i は以下のように表す、

$$\dot{\phi}_i = \omega_i(\phi_i) + \sum_{j \neq i} G(i, j) H(\phi_i, \phi_j) \omega_j(\phi_j). \quad (1)$$

式 (1) の第 1 項目の $\omega_i(\phi_i) = \frac{F_i(\phi_i)}{\gamma l}$ は回転子 i の固有振動数を表す。 $F_i(\phi_i)$ は回転子 i の軌道に対しての接線方向の駆動力を表し、 $\gamma = 6\pi\eta a$ は流体抵抗係数で η は流体の粘性率である。 $F_i(\phi_i)$ について、本研究では [3, 4] を参考に 2 つの force profile の場合を考える、

$$F_i(\phi_i) = F_i[1 - A \sin 2\phi_i], \quad (2)$$

$$F_i(\phi_i) = F_i[1 + B \sin(\phi_i + \frac{\pi}{4})]. \quad (3)$$

A と B は駆動力の最大値と最小値の差の大きさを表すパラメータ (変調強度) で、 A と B どちらの値の範囲も $0 \leq A \leq 1$, $0 \leq B \leq 1$ とする。式 (1) の第 2 項目は他の回転子からの相互作用を表す項である。本研究では回転子の周りの流体の境界条件について、回転子の体を固定する壁からの距離 h がかなり遠い、周りの流体が壁からの影響がない境界条件 (Oseen tensor) と、固定壁からの距離が回転子間の距離が十分近く、周りの流体が壁からの影響を受けるという境界条件 (Blake tensor) の 2 つの条件を考える。 [2] より、Oseen tensor の場合の結合強度 $G(i, j)$ と関数 $H(\phi_i, \phi_j)$ は

$$G = \frac{3a}{4|i-j|d}, \quad H = \cos(\phi_i - \phi_j) + \sin \phi_i \sin \phi_j, \quad (4)$$

Blake tensor の場合の結合パラメータ G と関数 $H(\phi_i, \phi_j)$ は以下のようになる。

$$G = \frac{9ah^2}{(|i-j|d)^3}, \quad H = \sin \phi_i \sin \phi_j \quad (5)$$

式 (1) について、解析を簡単にするために平均化を行う [3]。まず、位相 ϕ_i について変数変換を行う、

$$\Phi_i \equiv \frac{2\pi}{T_i} \int_0^{\phi_i} \frac{d\phi'_i}{\omega_i(\phi'_i)}, \quad (6)$$

式 (6) で使われている T_i は固有周期 $T_i \equiv \int_0^{T_i} dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_i}{\omega_i(\phi_i)}$ 。変数変換を行う際は、force profile のパラメータ A , B は $|A|, |B| \ll 1$ と仮定する。 Φ_i を用いて式 (1) を書き直すと、

$$\dot{\Phi}_i = \omega_i + \sum_{j \neq i}^N G(i, j) \omega_i \frac{\tilde{F}_j(\Phi_j)}{\tilde{F}_i(\Phi_i)} \tilde{H}(\Phi_i, \Phi_j) \quad (7)$$

ここで、定数の固有振動数として $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$, $\tilde{F}_i(\Phi_i) \equiv F_i(\Phi_i)$, $\tilde{H}(\Phi_i, \Phi_j) \equiv H(\Phi_i, \Phi_j)$ とおく。さらに、式 (7) について、平均化すると以下となる、

$$\dot{\Phi}_i = \omega_i + \sum_{j \neq i}^N G(i, j) \bar{\omega} \Gamma(\Phi_i - \Phi_j). \quad (8)$$

ここで $\bar{\omega} \equiv \frac{1}{N} \sum_0^N \omega_i$ とする。結合関数 $\Gamma(\Phi_i - \Phi_j)$ は $\Gamma(\Phi_i - \Phi_j) = C_1 \cos(\Phi_i - \Phi_j) - C_2 \sin(\Phi_i - \Phi_j)$ (9)

回転子の駆動力が式 (2) で Oseen tensor の場合は $(C_1, C_2) = (\frac{3}{2}, \frac{A}{2})$, となり [3], Blake tensor に境界条件を変えた場合は $(C_1, C_2) = (\frac{1}{2}, \frac{A}{2})$ となる。次に、回転子の駆動力を式 (3) として境界条件を Oseen tensor にした場合は $(C_1, C_2) = (\frac{1}{2}, \frac{B^2}{8})$, 境界条件を Blake tensor とした場合 $(C_1, C_2) = (\frac{1}{2}, \frac{B^2}{8})$ となる。

3 2つの回転子のエネルギー散逸率

泉田らは [3] で回転子の駆動力が式 (2) で境界条件が Oseen tensor の場合について、結合強度が上昇する、つまり回転子間の距離が接近すると同期が起こり、同期とともにエネルギー散逸率が急上昇することを確かめた。ここで、本研究では 2 つの回転子において、同期とともにエネルギー散逸率が急上昇することの一般性を検証する。検証方法としては他の駆動力や流体の境界条件で、結合強度 G を変化させた場合の同期とエネルギー散逸率の関係を数値計算を用いて検証する。ここでエネルギー散逸率、つまり周りの流体に与える仕事率の定義より、

$$P = l\dot{\phi}_1 F_1(\phi_1) + l\dot{\phi}_2 F_2(\phi_2). \quad (10)$$

まずは force profile が式 (2) の場合について、 $F_1 \neq F_2$ としてそれぞれの境界条件について、エネルギー散逸率の時間平均 $\langle P \rangle = \sum_{t_0}^{t_0+T}$ の数値計算を行った結果を図 2 に示す。またその他のパラメータは、 $\frac{F_1}{\gamma l} =$

$150.0s^{-1}$, $\frac{F_2}{\gamma l} = 151.0s^{-1}$, $a = 6.45\mu m$, $l = 9.68\mu m$, $\eta = 1.45mPa \cdot s$ とする [3].

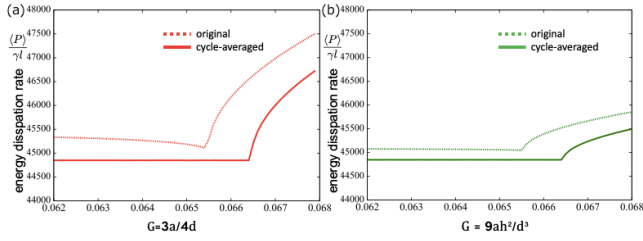


図 2: エネルギー散逸率の時間平均 $\langle P \rangle$ の流体相互作用強度 G 依存性. 境界条件が (a)Oseen tensor [3], (b) が Blake tensor の場合. 破線 (original) が式 (1) での数値計算で, 実線 (cycle-average) が式 (8).

平均化された式を用いて, 同期が起こる結合強度の閾値 G^* を調べる. それぞれの境界条件で結合強度 G の関数系は異なるが, 同期が起こる G の条件はどちらも $G^* = \left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{A\bar{\omega}} \right|$ に等しくなる.

次に force profile を式 (3) で, $\frac{F_1}{\gamma l} = 150.0s^{-1}$, $\frac{F_2}{\gamma l} = 150.025s^{-1}$ として同様に調べた (図 3).

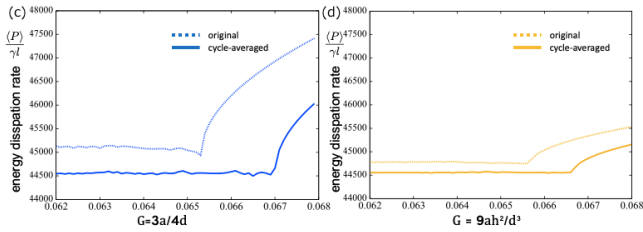


図 3: エネルギー散逸率の時間平均 $\langle P \rangle$ の流体相互作用強度 G 依存性. 境界条件が (c)Oseen tensor, (d) が Blake tensor の場合.

結合強度の閾値 G^* はどちらも $G^* = \left| \frac{4(\omega_1 - \omega_2)}{B^2\bar{\omega}} \right|$ となった.

4 回転子数 3 の場合の同期パターン

回転子数が 3 つの場合についての同期解の安定性と同期パターンを調べる. 今回は変調強度に着目する.

まずは回転子の駆動力が式 (2) で境界条件が Oseen tensor で記述される場合について平均化された式を用いて解析する. まず振動数は揃っているが, 位相が一定ずれている解を考える: $\Phi_1 = \Phi + \Delta_1$, $\Phi_2 = \Phi$, $\Phi_3 = \Phi + \Delta_3$, ここで Δ_1, Δ_3 は定数. これらを式 (8) に代入する. $A = 0.0$ の場合は $\Delta_1 = \Delta_3 = \pm \frac{\pi}{3}$, $\Delta_1 = -\Delta_3 = \pm \left(\pi + \arctan \left(\frac{\sqrt{2}3^{1/4}}{1-\sqrt{3}} \right) \right)$ となる. また, Δ_1, Δ_3 を A が 0.1 ごとに求めた解が図 4 である.

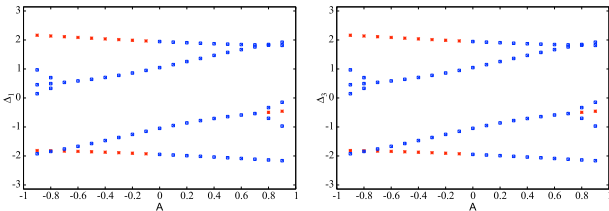


図 4: Oseen tensor の場合の Δ_1 と Δ_3 . 赤が安定解, 青が不安定解.

また $|A| \ll 1$ という仮定の元, 解の周りで式 (8) を線形化する. 変数 x, y を用いて $\Phi_1 = \Phi + \Delta_1 + x$, $\Phi_2 = \Phi$, $\Phi_3 = \Phi + \Delta_3 + y$ として式 (8) に代入する,

$$\dot{x} = G\omega \left(\Gamma(\Delta_1 + x) - \Gamma(-\Delta_1 - x) - \frac{1}{2} \Gamma(\Delta_1 - \Delta_3 + x - y) - \Gamma(-\Delta_3 - y) \right) \quad (11)$$

$$\dot{y} = G\omega \left(\Gamma(\Delta_3 + y) - \Gamma(-\Delta_1 - x) - \frac{1}{2} \Gamma(\Delta_3 - \Delta_1 + y - x) - \Gamma(-\Delta_3 - y) \right) \quad (12)$$

ここで $G = 3a/4d$ とする. これを線形化した式と数値計算で, A が 0.1 ごとの Δ_1, Δ_3 の安定性を調べた (図 4). $\Delta_1 = \Delta_3 = -\Delta$ の解について, $A = 0.0$ の周りで解を A の一次で近似し, 安定性を求める: $\Delta_1 = \Delta + k_1 A$, $\Delta_3 = -\Delta + k_3 A$, k_1, k_3 は定数. 未知数 k_1, k_3 を求め式 (11)(12) に代入して安定性を求めると, $A < 0$ で安定になり, $A > 0$ で不安定になることが確かめられた.

Blake tensor も同様に求める (図 5).

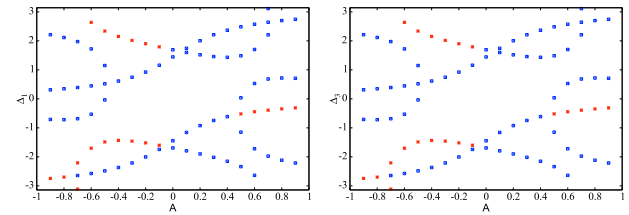


図 5: Blake tensor の場合の Δ_1 と Δ_3 . 赤が安定解, 青が不安定解.

force profile が式 (3) の場合は, 結合関数 $\Gamma(\Phi_i - \Phi_j)$ の式を見比べると, 上で求めた A について $A = \frac{B^2}{4}$ に置き換え, $0 \ll A \ll \frac{1}{4}$ の解と等価であるので, あらゆる B で不安定になる.

5 まとめと今後の課題と展望

2 つの回転子において, 結合強度が大きくなると同期が起こり, 同期とともにエネルギー散逸率が急上昇することの一般性を確かめた. また 3 つの回転子の同期パターンについて回転子の駆動力が式 (2) において, 回転子の周りの流体の境界条件が Oseen tensor と Blake tensor で記述されるどちらの場合でも, 変調強度 A が負の場合は安定し 3 つの回転子は metachronal 波が見られる. A が正の場合は A が大きくなると安定になる場合があり, 安定した場合は chevron (山形) 波が見られる.

今後の展望は, 3 つの回転子について A が正の場合の安定性について解析的にアプローチをし, エネルギー散逸率やエネルギー効率について求める.

参考文献

- [1] 内田就也. 流体力学的同期現象: 鞭毛や繊毛の集団運動の理解に向けて (最近の研究から). 日本物理学会誌, Vol. 67, No. 11, pp. 754–757, 2012.
- [2] Nariya Uchida and Ramin Golestanian. Generic conditions for hydrodynamic synchronization. *PHYSICAL REVIEW LETTERS* 106, 058104, 2011.
- [3] Hiroshi Kori Yuki Izumida and Udo Seifert. Energetics of synchronization in coupled oscillators rotating on circular trajectories. *PHYSICAL REVIEW E* 94, 052221, 2016.
- [4] 吉田理紗子, 郡宏. ストークス流体中の結合回転子集団の同期と遊泳ダイナミクス. お茶の水女子大学大学院修士論文, 2018.