

# 不均一な振動子集団の制御：大域的なフィードバックの効果の解析と最適化

理学専攻・情報科学コース 小澤 歩

## 1 はじめに

周期的な振る舞いをする素子は振動子と呼ばれ、また複数の振動子が相互作用によりリズムを揃える現象は同期現象と呼ばれる [1]. 同期現象の例は身の周りに広く観察されるが、その中には望ましくないものもある. 例えば、脳の大脳基底核における神経細胞の活動の異常な同期はパーキンソン病の病理と関係する可能性がある [2].

パーキンソン病の治療法の一つに、脳の一部に電気的な刺激を与える脳深部刺激療法 (DBS) がある. DBS が脳に作用するメカニズムは不明なものの、この治療法により神経細胞の異常な活動パターンや一部の症候が抑制されることが知られており、近年広く用いられるようになってきている. しかし、この治療法には様々な副作用が伴う. 脳の状態や症候に応じて適切に刺激を調整すれば、治療に用いる刺激の量を減らすことができ、副作用を軽減できると期待される.

このような背景から、フィードバックにより振動子の集団状態を制御する方法が研究されてきた. これらの研究から、振動子集団に大域的に与える簡単なフィードバックであっても、適切に調整すれば、振動子集団を効率良く制御できることが示唆されている. 一方、フィードバックの効果に関する理論的な解析は限定的にしかなされていない. 特に、振動子集団の不均一性を無視できない場合については、以下に述べるような課題が残されている. まず、先行研究の解析に用いられているモデルは、振動子集団が非同期状態から同期状態へ転移する領域以外のパラメータ領域での振る舞いを記述するには不十分である. したがって、なるべく弱いフィードバックで集団を制御するにはどのようにフィードバックを調整すればよいのかが一般には明らかでない. また、非同期状態を表す解以外の解の安定性が解析されていない. したがって、同じ振動子集団であっても、初期状態に依存して、フィードバックにより非同期化できたり、できなかつたりする可能性がある. そこで本論文では、不均一な振動子集団を、なるべく弱いフィードバックにより制御するための理論解析を行う.

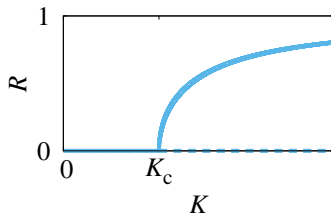


図1 式 (1) の振動子数無限大の極限に対応するモデルにおける、 $K$  と  $R$  の典型的な関係. 実線は安定な解を示す. 点線は不安定な解を示す. 臨界結合強度  $K_c$  で非同期状態に対応する解  $R = 0$  が不安定化すると同時に集団振動に対応する解が生じる.

## 2 モデル

### 2.1 同期現象を示す振動子集団を記述するモデル

振動子集団の数理モデルには様々なものがあるが、その振る舞いを解析的に調べられるものは限られている. 解析計算に適したモデルの一つに、以下で与えられる坂口-蔵本モデルがある [3]:

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + N^{-1}K \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_i + \beta). \quad (1)$$

ここで、 $\phi_i, \omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) はそれぞれ  $i$  番目の振動子の位相と固有振動数であり、 $N$  は振動子の総数である. 固有振動数  $\omega_i$  を適当な密度関数にしたがって分布させることにより、振動子集団に不均一性をもたせることができる. また、 $K > 0$  は振動子間相互作用の大きさを表し、結合強度と呼ばれる. パラメータ  $\beta$  は相互作用の非対称性を表し、 $|\beta| < \frac{\pi}{2}$  を満たすとする. 式 (1) は  $\beta = 0$  のとき、特に蔵本モデルと呼ばれる [1].

このモデルは、結合強度  $K$  が十分大きいとき、同期した集団振動を示す [3]. この集団振動は、以下のような量を用いて捉えることができる [1]:

$$r := N^{-1} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j}, \quad R := |r|, \quad \Theta := \arg(r). \quad (2)$$

これらの変数  $r, R, \Theta$  はそれぞれ複素オーダーパラメータ、蔵本オーダーパラメータ、平均位相と呼ばれる. 定義より  $R$  は  $0 \leq R \leq 1$  を満たし、またその値は集団の位相の揃い具合を反映する. 例えば、位相が一様に分布していれば  $R = 0$  となる. また、全振動子の位相が一致するときのみ  $R = 1$  となる.

式 (1) の振動子数無限大の極限に対応するモデルは、非同期状態に対応する解  $R = 0$  を自明な解としてもつ [3]. さらに、固有振動数の密度関数が対称な単峰形ならば、ある臨界結合強度  $K_c$  が存在して、 $K > K_c$  では同期した状態に対応する解が生じる [3]. 式 (1) の振動子数無限大の極限における  $K$  と  $R$  の関係の典型的な例を図1に示す.

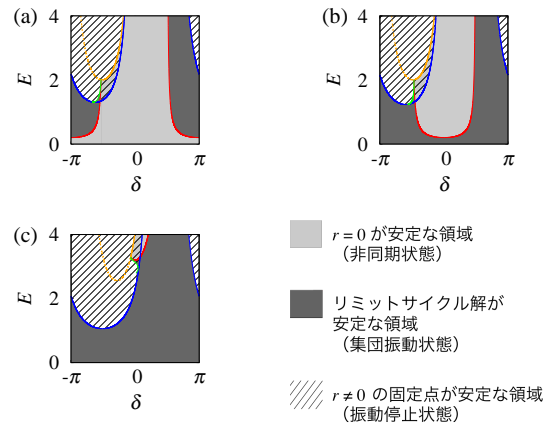


図2 式 (5) の安定解の解析にもとづく集団状態の相図.

## 2.2 本研究のモデル

式 (1) で記述される振動子集団にフィードバック

$$F(R, \Theta; \delta) = R \cos(\Theta - \delta) \quad (3)$$

を大域的に与えた以下のモデルを考える：

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + N^{-1} K \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_i + \beta) + EFz(\phi_i). \quad (4)$$

ここで、 $E \geq 0$  はフィードバック強度を表す。また、 $F$  のパラメータ  $\delta$  を位相シフトと呼ぶ。複素オーダーパラメータ  $r$  とその複素共役について線形な実数値関数は、適当な  $E$  と  $\delta$  を用いて  $EF(R, \Theta; \delta)$  と書けることに注意する。関数  $z(\phi)$  は位相感受関数と呼ばれ、振動子はその位相に応じてフィードバックからどのような作用を受けるかを定める。本研究では、解析の都合上  $z(\phi) = \sin(\phi + \alpha)$  とする。ただし、一般性を失うことなく  $\alpha = 0$  として解析する。

本研究では、主に式 (4) を解析する。ただし、このモデルには 1 次のフーリエ成分のみ含む周期関数から構成されているという特異性があるため、得られた結果のロバスト性を、より高次のフーリエ成分を含むモデルを用いて数値的に検証する。

## 3 解析

### 3.1 集団状態の相図

式 (4) で振動子無限個の極限に対応するモデルを考え、固有振動数がローレンツ分布  $g(\omega) = \gamma\pi^{-1} \left( (\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2 \right)^{-1}$  にしたがって分布すると仮定する。すると、Ott-Antonsen の理論を適用することにより、複素オーダーパラメータ  $r$  の時間発展方程式が以下のように得られる [4, 5]：

$$\dot{r} = (\Lambda + i\Omega)r - \frac{Ke^{-i\beta}}{2}|r|^2r - \frac{EF}{2}(1 - r^2). \quad (5)$$

ここで、 $\Lambda = -\gamma + \frac{K}{2} \cos \beta$ 、 $\Omega = \omega_0 + \frac{K}{2} \sin \beta$  とおいた。この方程式の安定解を調べることにより、振動子の集団状態の相図を得た (図 2)。図 2(a), (b) はそれぞれ結合強度  $K$  が  $K < K_c$  及び  $K > K_c$  を満たす場合の典型的な相図を示す。これらの図では、集団状態が 3 種類に分類されている：集団振動状態、非同期状態、そして集団振動とともに一部の振動子の振動が停止する振動停止状態である。図 2(c) には、図 2(b) よりさらに  $K$  が大きい場合の相図を示す。図 2(b) と比較して非同期状態の安定な領域が縮小しており、最小のフィードバック強度で非同期状態を安定化しようとする、振動停止状態もまた安定化されてしまうことがわかる。このような傾向は、高次のフーリエ成分を含むモデルでも確認された。

## 3.2 フィードバックの最適化

式 (5) を解析すると、 $K > K_c$  かつ  $\Omega \neq 0$  を満たす振動子集団について、最小のフィードバック強度  $E$  で非同期状態を安定化する位相シフト  $\delta$  が求まる。このような  $\delta$  と、そのときに必要な最小のフィードバック強度  $E$  を表 1 に示す。逆に、 $K < K_c$  の場合に最小の  $E$  で非同期状態を不安定化するための最適化をすることも可能である。また、最小の  $E$  で振動停止状態を安定化するための最適化は、 $\beta = 0$  かつ  $K$  が  $\omega, \gamma$  と比較して十分大きいときに、近似的にできる。

表 1 最小のフィードバック強度で非同期状態を安定化する位相シフト  $\delta$  とそのときに必要なフィードバック強度  $E$

条件	位相シフト $\delta$	フィードバック強度 $E$
$\Lambda \leq  \Omega $	0	$4\Lambda$
$\Lambda >  \Omega $	$\arcsin \left[ \frac{\Omega}{ \Omega } \left( \frac{\Lambda^2 - \Omega^2}{\Lambda^2 + \Omega^2} \right) \right]$	$\frac{2(\Lambda^2 + \Omega^2)}{ \Omega }$

## 4 おわりに

本論文では、大域的なフィードバックを受ける坂口-蔵本モデルの解析を行った。フィードバックは複素オーダーパラメータとその複素共役に関して線形な実数値関数とした。このフィードバックについて、非同期状態の安定性を最小のフィードバック強度で変化させるような最適化ができた。また、同期状態へ転移するときの値に比べて振動子集団の結合強度が十分大きいときに、このようなフィードバックを用いる場合、最小のフィードバック強度で非同期状態を安定化しようとする、振動停止状態もまた安定化されてしまうことが示された。

本研究の結果をもとに、より洗練されたフィードバックを考えることができるかもしれない。例えばフィードバックを非線形な関数に変えると、安定な振動停止状態の存在する領域が変化すると考えられる。また、本研究のモデルでは考慮されていないものの、大域的なフィードバックの効果を定性的に変える可能性がある要素として、振動子のネットワーク構造があげられる。

本研究は DBS の改良を動機としたが、得られた結果を同期を促進したいシステムに応用するのも興味深い。

## 参考文献

- [1] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer, New York (1984).
- [2] C. Hammond et al. Pathological synchronization in parkinson's disease: networks, models and treatments. *Trends in Neurosciences* **30**, No. 7, pp. 357-364 (2007).
- [3] H. Sakaguchi and Y. Kuramoto. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entertainment. *Progress of Theoretical Physics* **76**, No. 3, pp. 576-581 (1986).
- [4] E. Ott and T. M. Antonsen. *Chaos* **18**, 037113 (2008).; *Chaos* **19**, 023117 (2009).
- [5] K.H. Nagai and H. Kori. Noise-induced synchronization of a large population of globally coupled nonidentical oscillators. *PRE* **81**, 065202 (2010).