三重対角ランダム行列のスペクトル極限分布とそのゆらぎ

橋本 明枝　(指導教員：吉田 裕亮)

1　はじめに

GOE と GUE の場合のゆらぎモーメントは三重対角化することにより, 三重対角ランダム行列のゆらぎ公式が援用できる. しかし, GOE と GUE 以外の一般の Gaussian 成分を持つ Wigner 行列では三重対角化をして, 三重対角ランダム行列のゆらぎ公式を適用することはできない. 本研究では, GOE の三重対角化で得られるタイプのランダム行列において, 対角成分と非対角成分の分散の比 (後述の β) が変化したときのゆらぎモーメントの挙動について考察した.

2　GOE 行列と GUE 行列

Wigner 実対称行列の典型的な例は, Gaussian orthogonal ensemble (GOE) である. GOE 行列は, $\boldsymbol{X}_N$ を, X_{ij} が独立な標準ガウス確率変数の実ランダム行列として, 行列

$$\boldsymbol{T}_N = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{X}_N + {}^t\boldsymbol{X}_N)$$

で与えられる. GOE 行列 $\boldsymbol{T}_N = (T_{ij})$ において, 成分 T_{ij} はそれぞれ平均 0, 分散 $(1+\delta_{ij})$ の独立ガウス確率変数である.

Wigner 型エルミート行列の典型的な例は, Gaussian unitary ensemble(GUE) である. GUE 行列は, $\boldsymbol{X}_N$ を, $X_{ij} = Z_{ij} + \sqrt{-1}W_{ij}$ において Z_{ij} と W_{ij} が独立な標準ガウス確率変数であるエルミートランダム行列であるとして, 行列

$$\boldsymbol{S}_N = \frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_N + \boldsymbol{X}_N^*).$$

で与えられる. GUE 行列 $\boldsymbol{S}_N = (S_{ij})$ で, 成分 $S_{ij}(1 \le i < j \le N)$ はそれぞれ分散 1 の複素ガウス確率変数で, $S_{ij}(1 \le i \le N)$ は分散 1 の実ガウス確率変数である.

GOE, GUE の極限分布

GOE($\frac{1}{\sqrt{N}}\boldsymbol{T}_N$) と GUE($\frac{1}{\sqrt{N}}\boldsymbol{S}_N$) のスケーリング極限は, 同じ標準半円則になり、k 次モーメント α_k は以下のようになる. すなわち,

$$\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1}\dbinom{2m}{m} & if\ k = 2m\ (even), \\ 0 & if\ k = 2m+1\ (odd), \end{cases}$$

偶数次 ($2m$ 次) モーメントは m 次 Catalan number である.

固有値同時分布

GOE の行列 T_n や GUE の行列 S_n について、固有値同時分布は

$$\frac{1}{Z_{n,\beta}}\prod_{1\le i<j\le n}|x_i - x_j|^\beta \exp(-\beta\sum_i^n x_i^2/2)$$

で与えられる. ただし, $\beta = 1$ で GOE, $\beta = 2$ で GUE, $Z_{n,\beta}$ は規格化定数である.

3　三重対角モデル

三重対角ランダム行列モデル

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}}\begin{pmatrix} N(0,2) & \chi_\beta & & & & \\ \chi_\beta & N(0,2) & \chi_{2\beta} & & & \\ & \chi_{2\beta} & N(0,2) & \chi_{3\beta} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \chi_{(n-2)\beta} & N(0,2) & \chi_{(n-1)\beta} \\ & & & & \chi_{(n-1)\beta} & N(0,2) \end{pmatrix}$$

の固有値同時分布は $\beta = 1$ で GOE, $\beta = 2$ で GUE と一致する. すべての成分は独立で χ_r は自由度 r のカイ分布を表す.

近似モデル

上記の三重対角ランダム行列の近似モデルを (確定的な行列) ＋ (ランダムなゆらぎ) であると考えると, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ スケールの GOE,GUE の近似モデルが導かれる.

$$\frac{1}{\sqrt{n\beta}}\begin{pmatrix} N(0,2) & \chi_\beta & & & & \\ \chi_\beta & N(0,2) & \chi_{2\beta} & & & \\ & \chi_{2\beta} & N(0,2) & \chi_{3\beta} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \chi_{(n-2)\beta} & N(0,2) & \chi_{(n-1)\beta} \\ & & & & \chi_{(n-1)\beta} & N(0,2) \end{pmatrix}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \sqrt{n-2} & 0 & \sqrt{n-1} \\ & & & \sqrt{n-1} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{n\beta}}\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & & & \\ Y_1 & X_2 & Y_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & Y_{n-2} & X_{n-1} & Y_{n-1} \\ & & & Y_{n-1} & X_n \end{pmatrix}$$

ただし, $X_i \sim N(0,2)$ i.i.d., $Y_j \sim N(0,1/2)$ i.i.d. である.
この近似値モデルを

$$\boldsymbol{F} + \frac{1}{\sqrt{n\beta}}\boldsymbol{G}$$

とおくと, 近似 $\boldsymbol{H} \approx \boldsymbol{F} + \frac{1}{\sqrt{n\beta}}\boldsymbol{G}$ から, すべての解析関数 h について

$$\mathrm{tr}(h(\boldsymbol{H})) \approx \mathrm{tr}(h(\boldsymbol{F})) + \frac{1}{\sqrt{\beta n}}\mathrm{tr}(h'(\boldsymbol{F})\boldsymbol{G})$$

が従う. 特に, h を単項式として

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^k) \approx \mathrm{tr}(\boldsymbol{F}^k) + \frac{1}{\sqrt{\beta n}}\mathrm{tr}(k\boldsymbol{F}^{k-1}\boldsymbol{G})$$

を得る.
極限分布 (半円則) は, β に依らず, 確定的な部分によって導かれる.

GUE と GOE のゆらぎの式

GUE と GOE のゆらぎは

$$\alpha_{p,q} = \begin{cases} \dfrac{2}{\beta}\cdot\dfrac{pq}{2(p+q)}\dbinom{p}{\frac{p}{2}}\dbinom{q}{\frac{q}{2}} & p\ \text{と}\ q\ \text{は偶数}, \\ \dfrac{2}{\beta}\cdot\dfrac{2pq}{p+q}\dbinom{p-1}{\frac{p-1}{2}}\dbinom{q-1}{\frac{q-1}{2}} & p\ \text{と}\ q\ \text{は奇数}, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

と β に依存して決まる ($\beta = 1$ で GOE, $\beta = 2$ で GUE).

4　一般化された三重対角モデル

関数 f, g を, $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ で,

$$\int_0^1 f(x)^a g(x)^b dx$$

がすべての $a, b \in \mathbb{N}$ で存在するような可積分関数とする. $n \in \mathbb{N}$ について, $n \times n$ 型三重対角行列の決定的部分 $\boldsymbol{F}$ を,

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} f(\frac{1}{n}) & g(\frac{1}{n}) & & & & \\ g(\frac{1}{n}) & f(\frac{2}{n}) & g(\frac{1}{n}) & & & \\ & g(\frac{2}{n}) & f(\frac{3}{n}) & g(\frac{3}{n}) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & g(\frac{n-2}{n}) & f(\frac{n-1}{n}) & g(\frac{n-1}{n}) \\ & & & g(\frac{n-1}{n}) & f(\frac{n}{n}) \end{pmatrix}.$$

非決定的部分 $\boldsymbol{G}$ を

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & & & \\ Y_1 & X_2 & Y_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & Y_{n-2} & X_{n-1} & Y_{n-1} \\ & & & Y_{n-1} & X_n \end{pmatrix}$$

とする. ただし, X_i と Y_j は, それぞれ $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \ (0 \leq i \leq n), \mathrm{Var}(Y_j) = \eta^2 \ (0 \leq j \leq n-1)$ で互いに独立な平均 0 の Guass 確率変数である.

極限分布のモーメントとゆらぎ

上記のような, より一般的な三重対角ランダム行列モデル

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F} + \frac{1}{\sqrt{n}} \boldsymbol{G}$$

について, 直交多項式の理論を三重対角行列 $\boldsymbol{F}$ に適用すると, スペクトル極限分布の n モーメントは

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k, k, n-2k} \int_0^1 f(x)^{n-2k} g(x)^{2k} dx$$

で与えられる.
また, ゆらぎモーメントは

$$\alpha_{p,q} = \sigma^2 \Biggl\{ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} (p-2k)(q-2l) \times \binom{p}{k, k, p-2k} \binom{q}{l, l, q-2k} \times \int_0^1 f(x)^{A(k,l)} g(x)^{B(k,l)} dx \Biggr\}$$
$$+ \eta^2 \Biggl\{ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} 4kl \times \binom{p}{k, k, p-2k} \binom{q}{l, l, q-2k} \times \int_0^1 f(x)^{C(k,l)} g(x)^{D(k,l)} dx \Biggr\}$$

$A(k,l) = p - 2k + q - 2l - 2,\quad B(k,l) = 2k + 2l$
$C(k,l) = p - 2k + q - 2l,\quad D(k,l) = 2k + 2l - 2$

のようになることが知られている.(Dumitriu, Edelman) [2].

$x \in [0,1]$ について $f(x) = 0$, $g(x) = \sqrt{x}$ で, 分散が $\sigma^2 = \frac{2}{\beta}, \eta^2 = \frac{1}{2\beta}$ の場合, 上記の式から $\beta = 1$ で GOE, $\beta = 2$ で GUE のゆらぎがそれぞれ得られる.

Wigner 型のゆらぎモーメントは, 三重対角化し, その三重対角行列に GUE や GOE と同じようにゆらぎ公式が適用できそうに思えるが, しかし, 残念なことに, 一般的の Gauss 型 Wigner 行列の三重対角化では, その三重対角化された行列において, 成分が独立では無く, 先のゆらぎ公式を用いてゆらぎモーメントを求めることはできない.

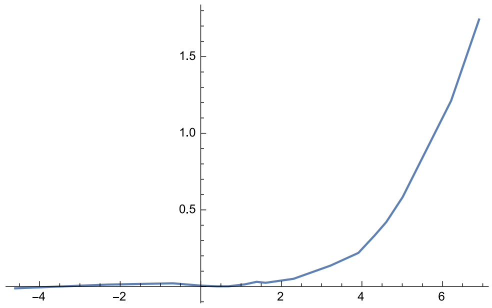
5　三重対角ランダム行列の共分散

本研究では, GOE の三重対角化で得られるランダム行列モデルでは, β の変化共に, 共分散行列の (奇数, 奇数) 成分のみ異なることを示した.

すなわち, 以下のように (奇数, 奇数) 成分のみ, 共分散構造が β 倍される.

$$\lim_{N \to \infty} N^2 \mathrm{Cov}(G_{N,\kappa}, G_{N,l})$$
$$= \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} 2\beta & 0 & 6\beta & 0 & 20\beta & 0 & 70\beta & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 16 & 0 & 60 & 0 & 224 \\ 6\beta & 0 & 24\beta & 0 & 90\beta & 0 & 336\beta & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 72 & 0 & 288 & 0 & 1120 \\ 20\beta & 0 & 90\beta & 0 & 360\beta & 0 & 1400\beta & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 288 & 0 & 1200 & 0 & 4800 \\ 70\beta & 0 & 336\beta & 0 & 1400\beta & 0 & 5600\beta & 0 \\ 0 & 224 & 0 & 1120 & 0 & 4800 & 0 & 19600 \end{bmatrix}$$

上記のことは, 三重対角ランダム行列のゆらぎモーメントの公式からも導かれるのであるが, 数値計算においては β が 10 を超えると理論値からのずれが大きくなり, β が大きい場合, すなわち低温側での数値計算による近似には使えないことが分かった.



(横軸 : Log[β の値], 縦軸 : Log[理論値からのずれ]) の plot

上記のグラフは $(2,2)$ 成分での理論値からのずれのグラフであるが, 他の成分も同じように $\beta = 10$ 付近からずれはじめることが数値計算の結果わかった.

参考文献

[1] Ioana Dumitriu, Alan Edelman " Matrix Models for Bate Ensembles" arXiv:math-ph/0206043 (2002)

[2] Ioana Dumitriu, Alan Edelman" Global spectrum fluctuations for the β-Hermite and β-Laguerre ensembles via matrix models" J. Math. Phys. **47** (2006), 063302.