

ロバストな輸送ネットワークの自己組織化モデル

理学専攻・情報科学コース 中西智美

1 はじめに

葉脈のような自然界に見られる輸送ネットワークは、ネットワーク全体に流体を輸送する上で適した樹状構造になっていることが多い。しかし、樹状ネットワークは虫食いや破損といったダメージに弱い。例えば、二叉脈（樹状）構造を成しているイチョウの葉は、水分や養分を葉全体に効率よく輸送できるが、葉の一部分に穴を開けてしまうと穴より先の部分へ流体を輸送できない。それに対して、網状脈をもつレモンの葉は分岐した先の葉脈同士が結びつくことで細かい網目構造を形成し、ネットワークの一部が切断されても損傷部を迂回することでネットワークの機能を維持できる形となっている [1, 2]。このことから、ダメージ耐性面では網目構造をもつ葉の方が優れていると言えるが、葉脈の構造が複雑であり輸送効率の点では劣る。このように、葉脈では効率面と耐性面の間にトレードオフが存在しているが、同様のトレードオフが他の多くの輸送ネットワークにも存在すると考えられる。

本研究ではネットワークを自発的に効率化させる自己組織化モデルに、ネットワークをロバストにする効果を付加したモデルを提案する。また、ネットワークのエネルギー散逸率や体積で構成される総コストに着目し、ロバスト強度によるネットワーク構造や総コストを比較する。本研究のモデルはロバストで効率的な輸送網の設計に利用できると期待される。

2 パイプネットワークの最適モデル

本研究では、流体を一点から多点に輸送するパイプネットワークを考える。流体を輸送する各地点をノード i ($i = 0, \dots, N-1$)、各地点を結ぶ経路をエッジとし、総エッジ数を M とする。各エッジは円柱形のパイプであるとし、ノード i と j をつなぐパイプの半径を r_{ij} 、長さを L_{ij} とする。細いパイプを流体がゆっくりと流れるとき、その流れはハーゲン・ポワズイユ流と呼ばれ、次の関係が成立することが知られている：

$$Q_{ij} = \frac{D_{ij}}{L_{ij}}(P_i - P_j), \quad \sum_j Q_{ij} = I_i. \quad (1)$$

ここで、 Q_{ij} ($= -Q_{ji}$) はノード i から j の向きの流量、 D_{ij} は単位長さあたりのコンダクタンス（抵抗の逆数）、 P_i はノード i の圧力、 I_i はノード i からネットワーク外部への流出量である ($I_i < 0$ のときは外部からの流入量を表す)。 D_{ij} は r_{ij}^4 に比例する量であり、適切な単位系を選ぶことにより $D_{ij} = r_{ij}^4$ とおくことができる。

次に、輸送ネットワークの効率を定量化するため、流体を流すために必要なコスト (= エネルギー散逸率) E と、ネットワークを維持のために必要なコスト (= 体積) V の線形和

$$H = E + \alpha V = \sum_{i,j>i} \frac{L_{ij}^2 Q_{ij}^2}{r_{ij}^4} + \alpha \sum_{i,j>i} L_{ij} r_{ij}^2 \quad (2)$$

をコスト関数として導入する。ここで $\alpha > 0$ は定数である。ここで、このコスト関数 H を r_{ij} のみの関数とみなす。 H は r_{ij} に依存して増減するが、 r_{ij} に関する変分系 $\dot{r}_{ij} = -\frac{\partial H}{\partial r_{ij}}$ を考えると、 H は時間とともに自発的に減少することが保証されるので、より効率の良いネットワークを得ることができる。しかし、コスト関数 H は多くの極小を持っていると考えられ、より効率よく最適化を行うために勾配系にノイズを導入した

$$\dot{r}_{ij} = \frac{4L_{ij}^2 Q_{ij}^2}{r_{ij}^5} - 2\alpha L_{ij} r_{ij} + \epsilon \xi_{ij}(t) \quad (3)$$

を考える。本研究では r_{ij} の発展方程式 (3) を最適モデルと呼ぶ。式 (1) と (3) を用いてネットワークの発展シミュレーションを行うと、輸送効率の良い樹状ネットワークが形成されることが知られている (図 1)[3]。

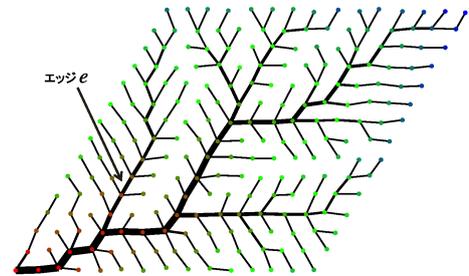


図 1: 三角格子ネットワークに最適モデルを適用した結果、自発的にコストを下げる効率の良い形として樹状ネットワークが得られた。しかし、十分に時間発展した後にエッジ e を切断すると、ネットワークが機能しない。各ノードの色は、ノードにおける圧力を示す。

3 ロバスト項の導入と検討

樹状ネットワークは効率は良いが次のような意味でダメージに対して弱い構造である。十分に時間発展し樹状ネットワークが形成された後に、エッジ e を切断する。ここで選んだエッジ e は主脈から 1 回分岐した側脈であり、三角格子ネットワークの左上部への輸送手段として大きな役目を果たしていたため、損傷部より先へ流体を輸送することができず、ネットワークの先端まで流れが到達できない。その結果、損傷部より先の部分はネットワークの機能を損なうことになる。

そこで、ネットワークに損傷があっても機能できるように、最適モデルの式にネットワークをロバストにする効果を付加することを検討した。網状の葉脈においては、太い脈からは比較的太い支脈が枝別れしてできる階層的な構造が作られている。このことに着想を得て、次の項を式 (3) の右辺に追加した。

$$\beta(S_i + S_j - 2r_{ij}) \quad (4)$$

ここで、 $S_i = \sum_k r_{ik}$ は、ノード i に接続しているエッジの半径の和、 $\beta > 0$ は総コストにおけるロバスト項の重みを示す定数とする。この項は太いエッジに隣接

しているエッジを太くする効果があり、これにより階層的なパイプネットワークが形成され、ダメージに対する耐性が生まれると期待される。この項をロバスト項と呼ぶ。

ロバスト項を導入したことによるエネルギー散逸率 E と体積 V 、総コスト H の時間発展をシミュレーションした。ロバスト強度 β を大きくすると、ネットワーク内のエッジが太くなるため、エネルギー散逸率 E は下がるが、エッジが太くなった分だけ体積 V が大きくなるため、結果的に総コスト H は大きくなってしまふ。ロバスト強度 β をあげてしまうと、効率面においては劣る結果となった (図 2)。

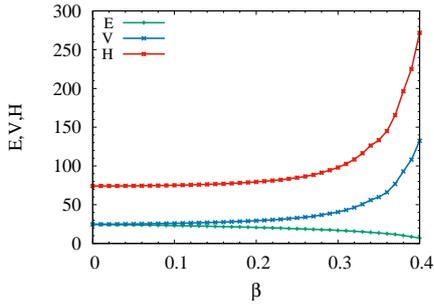


図 2: 十分時間発展させた三角格子ネットワークにおける、ロバスト強度 β とエネルギー散逸率 E 、体積 V 、総コスト H の関係性。

次に、ロバスト項を導入することで、ネットワーク構造がどのように変化したか示す。ロバスト項を加えた最適モデルの式を十分に時間発展させると、図 3 上のように樹状ネットワークを主として多数のループをもつ網目状のネットワークが形成される。図 1 と同様にエッジ e を切断すると、図 3 下のように損傷部を迂回してネットワークの先端まで流れが到達可能となった。

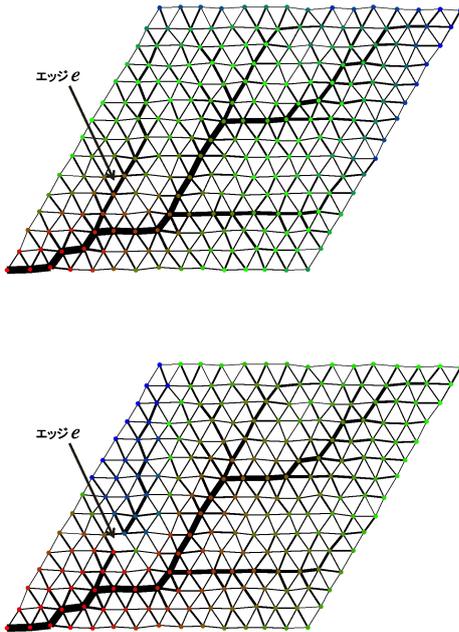


図 3: ロバスト項を追加した最適モデルを三角格子ネットワークに適用した結果。(上) エッジ e 切断前、(下) 切断後。

エッジ e の切断によるネットワーク内の流れの変化を調べた。図 4 はエッジ e 切断前後の流量を可視化したものである。エッジ e の切断に伴い、それまで流量の少なかった側脈が迂回路として機能していることがわかる。

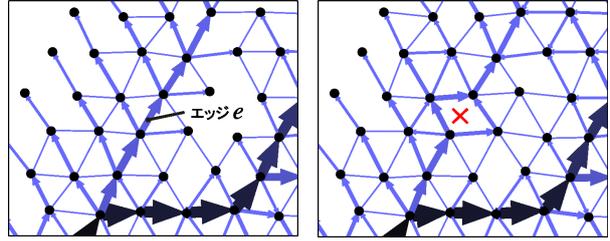


図 4: 損傷部付近におけるネットワークの流れの様子。矢印の幅は流量を示す。(左) エッジ e 切断前、(右) 切断後。

最後に、ネットワークにダメージを与えたときのコストの変動を調べた (図 5)。 β が小さいと細い迂回路の流量が増加するため、エネルギー散逸率 E が上昇し総コスト H が高くなる。また、 β が大きすぎると太い迂回路ができるため体積 V が上昇し、総コスト H が高くなってしまふ。しかし、適度な大きさの β を与えると、コストが必要以上に大きくなり、効率とダメージ耐性を兼ね備えたネットワークが得られる。

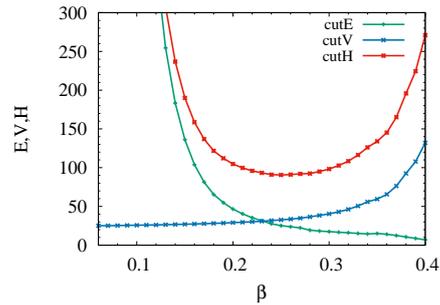


図 5: エッジ e を切断したネットワークにおける、ロバスト強度 β とエネルギー散逸率 E 、体積 V 、総コスト H の関係性。 $\beta = 0.25$ 付近で総コスト H は極小値をとる。

4 まとめと今後の課題

本研究では、効率性とロバスト性を兼ね備えた輸送ネットワークの自己組織化モデルを提案し、ネットワーク内の一部のエッジを切断することによるダメージ耐性を検証した。効率とダメージ耐性はトレードオフの関係にあり、ロバスト性を増強するパラメタ β を適切な値に設定することにより、コストを抑えつつダメージ耐性のあるネットワークを得ることができた。本提案モデルは、自然界や人工物の輸送ネットワークの理解と設計に活用できると期待される。

参考文献

- [1] Don Monroe, Focus : Why Leaves Aren't Trees, Phys. Rev. Focus 25, 4 (2010)
- [2] Eleni Katifori, Gergely J. Szollosi, and Marcelo O. Magnasco, Damage and Fluctuations Induce Loops in Optimal Transport Networks, Physical Review Letters, 104, 048704 (2010)
- [3] 椿田明, 流路の樹状ネットワークの自己組織化モデル: 血管網や河川網などの形成原理と構造解明に向けて, 修士論文 (お茶の水女子大学), 2016