# 要素間に相関を持つ Wigner 型ランダム行列の漸近挙動

理学専攻　情報科学コース　須田 羽奈子　(指導教員：吉田 裕亮)

## 1　はじめに

近年，データの蓄積量が膨大になっており，それに伴い少ない計算量でデータ解析の精度をあげることが求められている．従来のランダム行列に関する研究では，ランダム行列の固有値経験分布が調べられ，最近では，時系列データ解析への応用も研究されている．

代表的なランダム行列に，Wishart 型と Wigner 型の 2 種類がある．時系列データ解析への応用研究に関して，従来では Wishart 型に配置した場合の漸近挙動が注目されてきた．本研究ではデータを Wigner 型に配置した場合の漸近挙動に注目し，Wishart 型の場合の約半分のデータ量で同様の漸近挙動の解析が可能なことをみる．

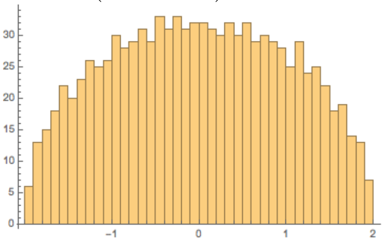
## 2　Wigner 型ランダム行列

### 2.1　ランダム行列理論

ランダム行列の固有値の性質に関する理論をランダム行列理論という．Wigner 型実対称ランダム行列において，固有値経験分布，すなわちスペクトル極限分布は行列サイズ $n \to \infty$ で密度関数

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}\sqrt{4\sigma^2 - x^2}$$

に分布収束する．($\sigma^2$ は分散)



$n = 1000$ の場合の固有値のヒストグラム

### 2.2　スペクトル極限分布

また，行列の各要素が互いに独立な Wigner 型ランダム行列の場合，$n \times n$ のランダム行列 $A$ のスペクトル極限分布の $k$ 次モーメントは $\mathrm{tr}(A^k)$，すなわち $A$ の固有値の $k$ 乗の平均である．$k$ 次モーメント $m_k$ は $n \to \infty$ で，以下の値に収束することが知られている [1]．

$$m_k = \begin{cases} 0 & \text{if } k = 2n+1, \\ \dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!} & \text{if } k = 2n, \end{cases}$$

ここで，$\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ は $n$ 次 Catalan 数と呼ばれている．

## 3　要素間に $MA$ 相関を持つランダム行列のスペクトル極限分布

パラメータ $\{c_i\}_{i=1}^q$ の $MA(q)$ モデル

$$d_k = \sum_{i=0}^{q} c_i Z_{k+i},\ \ Z_k \sim N(0,1) i.i.d$$

を

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} d_1 & d_{n+1} & d_{2n} & \cdots & d_{n(n+1)/2} \\ d_{n+1} & d_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ d_{2n} & \ddots & \ddots & \ddots & d_{3n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & d_{2n-1} \\ d_{n(n+1)/2} & \cdots & d_{3n-2} & d_{2n-1} & d_n \end{pmatrix}$$

のように Wigner 型に配置する．

Wigner 型ランダム行列のスペクトル極限分布のモーメントは奇数次は 0 で与えられることが知られている．従って，$Y = \boldsymbol{X}^t \boldsymbol{X}$ とし，$Y$ のスペクトル極限分布の $k$ 次モーメント

$$\alpha_k = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}_n^k)]$$

を考える．このとき，$Y$ は Compound Poisson 型として与えられることを見る．

$MA(q)$ モデルについて，

$$T_j = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{0 \quad \cdots \quad c_j}}^{j+1} \hphantom{\quad \cdots \quad 0} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & c_j & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}_{(j=1,2,\ldots q)}$$

$$S_j = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{j+1}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(j=1,2,\ldots q)}$$

$$\boldsymbol{Z} = (Z_{i\wedge j, i\vee j})_{(n+q)\times(n+q)}$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{\mathbf{1}}}^{n} & \overbrace{\hphantom{0}}^{p} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

とおく．

$$\widetilde{T} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{1} & T_1 & \cdots & T_q \\ \hline T_1 & \mathbf{1} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \mathbf{1} & T_1 \\ \hline T_q & \cdots & T_1 & \mathbf{1} \end{array}\right),\ \widetilde{S} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{1} & S_1 & \cdots & S_q \\ \hline S_1 & \mathbf{1} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \mathbf{1} & S_1 \\ \hline S_q & \cdots & S_1 & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

$$\widetilde{Z} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{Z} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{Z} \end{array}\right), \widetilde{P} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} P & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

を構成する．ただし，$\widetilde{T}, \widetilde{S}, \widetilde{Z}, \widetilde{P}$ のサイズは $(n+q)(q+1) \times (n+q)(q+1)$ であり，このとき，

$$\boldsymbol{Z} + \sum_{\ell=1}^{q} T_\ell \boldsymbol{Z} S_\ell = \widetilde{P}\,\widetilde{T}\,\widetilde{Z}\,\widetilde{S}\,\widetilde{P}\,\Big|_{n\times n\,\text{principal block}}$$

となる．$Y$ の $k$ 次モーメント，すなわち $\boldsymbol{X}$ の $2k$ 次モーメントについて，

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_n[(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X})^k] &= \mathrm{tr}_{(q+1)n}[((\widetilde{P}\,\widetilde{T}\,\widetilde{Z}\,\widetilde{S}\,\widetilde{P})^t(\widetilde{P}\,\widetilde{T}\,\widetilde{Z}\,\widetilde{S}\,\widetilde{P}))^k] \\ &= \mathrm{tr}_{(q+1)n}[(\widetilde{Z}\,\widetilde{S}\,\widetilde{P}\,{}^t\widetilde{S}\,\widetilde{Z}\,{}^t\widetilde{T}\,\widetilde{P}\,\widetilde{T})^k] \end{aligned}$$

が成り立つので，$H = \widetilde{S}\,\widetilde{P}\,{}^t\widetilde{S}, D = {}^t\widetilde{T}\,\widetilde{P}\,\widetilde{T}$ とおくと，

$$\mathrm{tr}_n[(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X})^k] = \mathrm{tr}_{(q+1)n}[(\widetilde{Z}H\widetilde{Z}D)^k]$$

となる．$\widetilde{Z}H\widetilde{Z}$ のスペクトル極限分布 $\mu$ は Free Compound Poisson 型なので，$H$ のスペクトル極限分布 $\rho$ を用いて，$\mu = \pi_1 \boxtimes \rho$ と表せる．また，$\widetilde{Z}H\widetilde{Z}D$ のスペクトル極限分布 $\tau$ は，$D$ のスペクトル極限分布 $\nu$ を用いて，$\tau = \mu \boxtimes \nu = \pi_1 \boxtimes \rho \boxtimes \nu$ で表すことが出来る．

以上より，$Y$ の $k$ 次モーメント $\alpha_k$ は自己相関 $\gamma_0$ とカタラン数 $C_k$ を用いて，

$$\alpha_k = C_k \gamma_0^k$$

と表わされることが導かれる．$MA$ モデルの場合の $\gamma_0$ は，

$$\gamma_0 = 1 + \sum_{\ell=1}^{q} c_\ell^2$$

とで与えられる．

## 4　$AR$ 相関および $ARMA$ 相関への応用

先ほどの $MA(q)$ モデルのスペクトル極限分布のモーメントの導出は $AR(p)$ モデルと $ARMA(p,q)$ モデルにも適用可能である．$AR(p)$ モデル

$$X_k = \sum_{i=1}^{p} b_i X_{k-i}$$

と $ARMA(p,q)$ モデル

$$\sum_{i=0}^{p} b_i X_{k-i} = \sum_{i=0}^{q} c_i \boldsymbol{Z}_{k-i}$$

のスペクトル極限分布のモーメントは $MA$ 相関の場合の様に行列上にデータ $X_k$ を斜めに配置すると，同様の計算が従うことがわかる．つまり，$AR(p)$ モデルと $ARMA(p,q)$ モデルのモーメント $\alpha_k$ は

$$\alpha_k = C_k \gamma_0^k$$

で与えられる．このとき，$AR(p)$ モデルの場合は，自己相関係数

$$\rho_j = \sum_{i=1}^{p} b_i \rho_{j-i}$$

を用いて

$$\gamma_0 = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{p} b_i \rho_i}$$

と表される．また，$ARMA$ モデルの場合，

$$P(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_p t^p$$

$$Q(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_p t^q$$

$$f(\omega) = \left| \frac{P(e^{2i\omega})}{Q(e^{-2i\omega})} \right|$$

とおくと，

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) d\omega$$

で与えられる [2].

## 5　ゆらぎモーメント

ゆらぎモーメントとは，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}_n^k - \alpha_k \cdot \boldsymbol{I})$ のゆらぎとして与えられるもので，

$$\alpha_{p,q} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Cov}[\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}_N^p), \mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}_N^q)]$$

と定義される．Free Compound Poison 型の場合，モーメント母関数 $M(x)$ は

$$M(x) = 1 + \sum_{k\geq 1} \alpha_k x^k,$$

となり，$\alpha_{p,q}$ の母関数 $M(x,y)$ は，

$$M(x,y) = xy\left(\frac{\frac{d}{dx}(xM(x)) \cdot \frac{d}{dy}(yM(y))}{(xM(x) - yM(y))^2} - \frac{1}{(x-y)^2}\right)$$

と与えられる．これにより，理論的に $MA$ 相関，$AR$ 相関，$ARMA$ 相関を持つ場合の Wigner 型ランダム行列 $\boldsymbol{X}$ についてスペクトル極限分布のモーメントとそのゆらぎモーメントが記述できる．

## 6　まとめと今後の課題

本研究では，要素間に時系列相関を持つ Wigner 型ランダム行列のモーメントは自己相関 $\gamma_0$ を用いて表せることを示した．また，このランダム行列が Free Compound Poison 型で表されることにより，理論的にゆらぎモーメントも与えられた．今後はこのモーメントとゆらぎモーメントを用いて，時系列モデルパラメータ検定などに応用していきたい．

## 参考文献


[1] ランダム行列の数理と科学・渡辺澄男・永尾太郎・樺島祥介・田中利幸・中島伸一・2014 年・森北出版

[2] 経済・ファイナンスデータの計量時系列分析・沖本竜義・2016 年・朝倉書店