

# リズム集団のシンクロの理論研究： 不均一性とノイズの効果およびリズムミクな動作の同期解析

理学専攻 情報科学コース 加藤 由里子 (指導教員：郡 宏)

## 1 はじめに

同期現象とは、固有には振動周期が異なる複数の振動子において、なんらかの相互作用によって振動のタイミングが一致することである。一方の振動子が1回振動する間に他方の振動子がちょうど1回振動することを1:1同期と呼び、一方の振動子が $m$ 回振動する間に他方の振動子がちょうど $n$ 回振動することを $m:n$ 同期と呼ぶ(ただし、 $m$ と $n$ は互いに素な整数とする) [1]。メトロノームの集団同期やホテルの集団発光やバリ島の民族舞踏ケチャは1:1同期の例で、約4Hzの脳波と約8Hzの脳波の同期現象は1:2同期の例である。

自然のリズムすなわち現実の振動現象にはノイズが存在し、そのため同期が悪くなる。ネットワークで相互作用する振動子集団の同期に対するノイズの効果は、無向ネットワークにおいて先行研究があり、同一のノイズ強度を持つ多数の振動子集団に対してモンテカルロ法で最適ネットワークを探索した [2]。本研究では、不均一なノイズ強度と有向ネットワークでのノイズの効果を定量化するため、ネットワーク上のノイズな振動子集団のモデル [3] を用いて少数の振動子集団でシミュレーションと理論解析を行い、解析的に最適ネットワークを導出した。この理論により、信頼性の異なる振動子のネットワーク上の最適配置を導出できる。

## 2 使用するモデル

次式で表される、ネットワーク上のノイズな振動子集団のダイナミクスを考える：

$$\dot{\phi}_i(t) = \omega + \kappa \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\phi_j(t) - \phi_i(t)) + \xi_i(t) \quad (1)$$

ここで、 $N$ は振動子の総数、 $\phi_i(t)$  ( $i = 1, \dots, N$ )は各振動子の時刻 $t$ における位相、 $\omega$ は各振動子の固有振動数、 $\kappa$ は各振動子間の結合の強さ、 $A_{ij}$ は振動子 $i$ が振動子 $j$ から受ける作用の大きさ(ただし $A_{ii} = 0$ )である。 $\xi_i(t)$ は振動子 $i$ に働く平均0、分散 $\eta_i$ の白色ガウスノイズである。以降 $\eta_i$ をノイズ強度と呼び、信頼性の高い振動子を小さな $\eta_i$ 値によって表現する。

各振動子の位相 $\phi_j$ と虚数単位 $i$ を用いて、蔵本秩序変数 $R(t)$ と重心位相 $\theta(t)$ を

$$Re^{i\theta} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j} \quad (2)$$

で定義する。振動子集団の位相がすべて一致するとき $R(t) = 1$ であり、位相が一様に分布するとき $R(t) = 0$ となる。つまり、 $R(t)$ は同期の良さを示す指標である。ノイズがあるとき $R(t)$ はゆらぐため、以降、 $R(t)$ の長時間平均である $\langle R \rangle$ に着目し、これを同期度と呼ぶ。また、後の便宜上、非同期度 $Q$ を $\frac{Q}{2} = 1 - \langle R \rangle$ によって定義する。 $Q$ が0に近いほど、同期がよい。

## 3 同期の数値解析

例として、図1のような振動子数3、リンク数4のネットワークについて考える。 $p = 0$ とするとネットワーク(A)と(B)は同一となる。

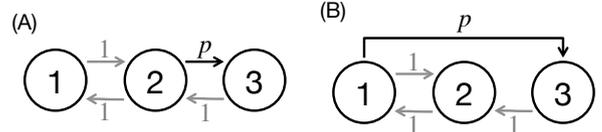


図1 振動子数3、リンク数4のネットワーク

まず、ノイズ強度 $\eta_i = 0.05$  ( $i = 1, 2, 3$ )、パラメータ $p = 1$ とした場合で同期の結合強度 $\kappa$ 依存性を数値的に調べた(図2)。ネットワーク(B)のほうが $Q$ が小さく、同期が良かった。

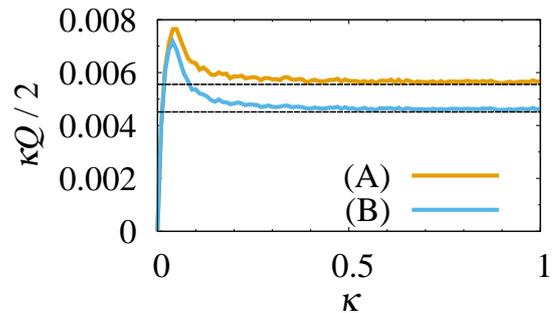


図2 固有振動数 $\omega = 1$ 、パラメータ $p = 1$ 、ノイズ強度 $\eta_i = 0.05$ としたときの非同期度の $\kappa$ 依存性(黒線は理論値)

次に、3つの振動子のうち1つだけノイズ強度 $\eta_i = 0.05$ 、残りの2つの振動子のノイズ強度を0、結合強度 $\kappa = 1$ とした場合でパラメータ $p$ 依存性を調べた(図3)。いずれのネットワークでも、 $p = 1$ のときは振動子2のノイズ強度を0.05とするのが最適配置であった。

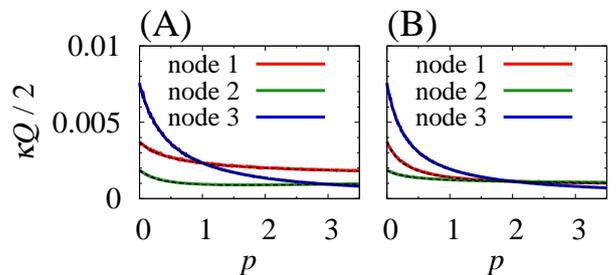


図3 固有振動数 $\omega = 1$ 、結合強度 $\kappa = 1$ 、1つだけノイズ強度 $\eta_i = 0.05$ としたときの非同期度の $p$ 依存性(黒線は理論値)

さらに、1つだけノイズ強度 $\eta_i = 0$ 、残りの2つの振

動子のノイズ強度を 0.05, 結合強度  $\kappa = 1$  とした場合で同期のパラメータ  $p$  依存性を調べた (図 4). いずれのネットワークでも,  $p = 1$  のときは振動子 3 のノイズ強度を 0 とするのが最適配置であった.

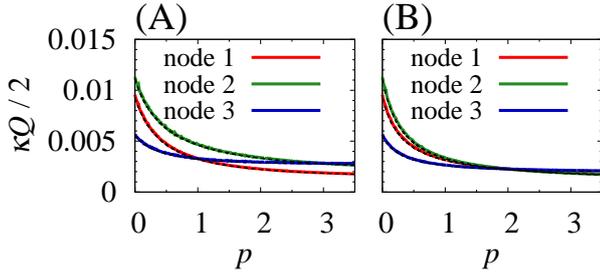


図 4 固有振動数  $\omega = 1$ , 結合強度  $\kappa = 1$ , 1 つだけノイズ強度  $\eta_i = 0$  としたときの非同期度の  $p$  依存性 (黒線は理論値)

#### 4 同期の理論解析

前節の数値解析結果を理論的に検証する. 解析的に取り扱えるようにするため, 結合強度  $\kappa$  がノイズ強度  $\eta_i$  に比べて十分大きいことを仮定する. すると, 振動子間の位相差は十分小さくなり,  $\sin(\phi_j - \phi_i) \approx \phi_j - \phi_i$  と線形化できる. さらに, 相対位相  $x_i(t) = \phi_i(t) - \omega t$  を用いると, 式 (1) は

$$\dot{x}_i(t) = \kappa \sum_{j=1}^N A_{ij} (x_j(t) - x_i(t)) + \xi_i(t) \quad (3)$$

と線形化できる. さらに, 状態変数ベクトル  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}$  とラプラス行列  $L$  を用いると, 式 (3) は

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\kappa L \mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\xi}(t) \quad (4)$$

と表される.

ラプラス行列  $L$  が対角化できるとき,  $L$  の固有値  $\lambda_m$  ( $m = 1, \dots, N$ ) と, 固有値に対応する左固有ベクトル  $\mathbf{u}^{(m)}$  と右固有ベクトル  $\mathbf{v}^{(m)}$  を用いて, 非同期度  $Q$  は

$$Q = \sum_{m \geq 2, n \geq 2}^N \left( \frac{\overline{u^{(m)} u^{(n)}} - \overline{u^{(m)}} \overline{u^{(n)}}}{\kappa(\lambda_m + \lambda_n)} \right) \frac{\hat{\eta}_{mn}}{\kappa(\lambda_m + \lambda_n)}, \quad \hat{\eta}_{mn} = \sum_{i=1}^N v_i^{(m)} v_i^{(n)} \eta_i \quad (5)$$

と表わすことができる. ただし, 固有ベクトルは  $\mathbf{v}^{(m)} \mathbf{u}^{(n)} = \delta_{mn}$  と規格化されている. さらに,  $L$  が対称行列のときは  $\mathbf{u}^{(n)} = (\mathbf{v}^{(n)})^T$  より

$$Q = \frac{1}{2N} \sum_{m=2}^N \frac{\hat{\eta}_m}{\kappa \lambda_m}, \quad \hat{\eta}_m = \sum_{i=1}^N \left( u_i^{(m)} \right)^2 \eta_i \quad (6)$$

と簡略化でき, これは先行研究 [2] の結果を一般化したものとなっている.

ネットワーク (B) のラプラス行列は  $p = 1$  では対角化不可能である. しかし, 対角化可能な  $p \neq 1$  の条件

下で非同期度  $Q$  を求めてから  $p \rightarrow 1$  とすることで定量化が可能となる.

式 (5) より,

$$\frac{Q^{(A)}}{2} = \frac{(p^2 + 5p + 4) \eta_1 + (p^2 + p + 2) \eta_2 + (2p + 8) \eta_3}{9\kappa (2p^2 + 7p + 3)} \quad (7)$$

$$\frac{Q^{(B)}}{2} = \frac{(p^2 + 3p + 4) \eta_1 + (p^2 + 4p + 2) \eta_2 + (3p + 8) \eta_3}{9\kappa (3p^2 + 10p + 3)} \quad (8)$$

と求まり,  $p \rightarrow 1$  では

$$\lim_{p \rightarrow 1} \frac{Q^{(A)}}{2} = \frac{5\eta_1 + 2\eta_2 + 5\eta_3}{108\kappa} \quad (9)$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} \frac{Q^{(B)}}{2} = \frac{8\eta_1 + 7\eta_2 + 11\eta_3}{288\kappa} \quad (10)$$

となる. これらは図 2, 3 の黒点線で表しており, ある程度大きな  $\kappa$  で数値計算結果とよく合致していることがわかる.  $\kappa$  が 0.2 程度より小さいと, 理論と数値計算に乖離が見られるが, これは, 小さな  $\kappa$  では振動子間の位相差が大きくなり, 用いた線形化の近似の精度が悪くなることが原因だと考えられる.

#### 5 まとめと今後の課題

ネットワーク (A) の  $p = 1$  のような無向ネットワークについて先行研究で示された同期に対するノイズの効果の定量化を拡張し, 本研究では, ネットワーク (A) の  $p \neq 1$  やネットワーク (B) のような有向ネットワークについても同期に対するノイズの効果の定量化に成功した. また, ネットワーク (B) の  $p = 1$  のようなラプラス行列  $L$  が対角化不可能な場合でも,  $p \neq 1$  として非同期度を求めてから  $p \rightarrow 1$  とすれば定量化できる.

式 (9), (10) より  $p = 1$  では, 全てのノイズ強度  $\eta_i = 0.05$  としたときは  $Q^{(B)}$  のほうが小さく, 1 つだけノイズ強度  $\eta_i = 0.05$  としたときは  $Q^{(A)}$  のほうが小さく, 1 つだけノイズ強度  $\eta_i = 0$  としたときは  $Q^{(B)}$  のほうが小さくなっている. 同期を最適にする配置やネットワーク構造を直観的に予測することは難しいが, この理論を用いれば, ラプラス行列  $L$  が非対称行列の場合でも正確に予測することが可能である.

バリ島の民族舞踏ケチャには複数のパートが存在し, 全員が同相ではない. いくつかの位相に別れたクラスター状態において理論を構築することも興味深い.

#### 参考文献

- [1] Yoshiki Kuramoto. *Chemical oscillations, waves, and turbulence*. Dover, 2003.
- [2] Tatsuo Yanagita and Takashi Ichinomiya. Thermodynamic characterization of synchronization-optimized oscillator networks. *Physical Review E*, Vol. 90, No. 6, p. 062914, 2014.
- [3] Hiroshi Kori, Yoji Kawamura, and Naoki Masuda. Structure of cell networks critically determines oscillation regularity. *Journal of theoretical biology*, Vol. 297, pp. 61–72, 2012.