

# 振動子ネットワークの自己組織的最適化モデル

理学専攻・情報科学コース 石川 夏衣

## 1 はじめに

同期現象というものがある．これは振動子群が相互作用や周期外力の作用によってタイミングを揃える現象で，例えば少しテンポの違う複数のメトロノームを糸でつるした「橋」の上に乘せて一齐に動かすと，影響しあって同じタイミングで音を刻むようになるのも，この一種である．

この現象で重要なのは「力の小さなものたちが同期することで大きな力を生み出す」というところで，同期現象を効率よく起こせるか否かで，全体として得られる成果が変わってくることになる．

現在，同期現象の多くは振動子一つ一つをノード，ノード間の相互作用をリンクで表した「振動子ネットワーク」を用いて研究が行われている．[1]

本研究ではまず，同期に最適な振動子ネットワークを自己組織的に形成するモデルを提案し，得られたネットワークを観察することで，最適振動子ネットワークの特徴を検証する．さらにモデルを拡張し，最適な電力網を形成する「電力網モデル」の提案・検証も行った．

## 2 モデル

### 2.1 振動子ネットワークの線形化と位相ロック解

次の振動子集団を考える．

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (1)$$

ここで  $\phi_i$  はノード  $i$  の位相， $\omega_i$  は固有振動数， $A$  は非負の対称行列でネットワークの形を表す隣接行列である．そのため  $A_{ij}$  は隣接行列  $A$  の各要素で，それぞれのリンクの重みを表している．ノード間の相互作用が強いほど  $A_{ij}$  の値は大きくなる．

平均振動数を  $\bar{\omega}$  とし，相互作用する振動子間の位相差  $(\phi_j - \phi_i)$  が十分小さいことを仮定する． $\phi_i(t) = x_i + \bar{\omega}t$  とおくと式 (1) は式 (2) に近似できる．

$$\frac{dx_i}{dt} = \omega_i - \bar{\omega} + \sum_{j=1}^N A_{ij}(x_j - x_i). \quad (2)$$

右辺を 0 とおくと  $N$  個の連立方程式が得られ，次の形式で表せる．

$$Lx = w \quad (3)$$

ここで  $L = D - A$  で， $L$  はラプラス行列， $D$  は  $A$  の  $i$  行の総和  $d_i$  を  $i$  番目の対角成分とする行列． $w$  は振動数ベクトルで  $w = (\omega_1 - \bar{\omega}, \omega_2 - \bar{\omega}, \dots, \omega_N - \bar{\omega})$  とする．式 (3) を解くことで，位相ロック解が求められる．

### 2.2 ネットワークの発展則

コスト関数  $H = E + kV$  の最小化を考える． $E = \sum_{i,j} A_{ij}(x_j - x_i)^2$  は同期のペナルティ関数で，相互作用を持つ振動子間の位相差が減ると小さくなる値である． $V = \sum_{i,j>i} A_{ij}$  はリンクにかかるコストで，

$k$  が小さいと  $E$  が小さくなることを，大きいと  $V$  が小さくなることを重視する．

ここで  $Q_{ij} = A_{ij}(x_j - x_i)$  を定義することで， $E = \sum_{i,j} \frac{Q_{ij}^2}{A_{ij}}$  と書き直すことができる．

結果， $A_{ij}$  についての  $H$  をポテンシャルとする変分系として以下を得られる．

$$\frac{dA_{ij}}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta A_{ij}} = \frac{Q_{ij}^2 - kA_{ij}^2}{A_{ij}^2} \quad (4)$$

以上から，次の手順でネットワークを発展させることにより  $H$  を低下させる意味で，同期に適したネットワークを自己組織的に得ることができる．

1. ネットワークの初期設定 一様な全結合や鎖状等．
2. 振動数の初期設定 等間隔や乱数．
3. 式 (3) を解く
4. 式 (4) をオイラー法で時間  $dt$  だけ発展させる
- 5.3 から繰り返す

## 3 実行結果

固有振動数  $\omega_i$  は乱数で，それぞれ一番右のノードが最も遅く，反時計回りに昇順に配置した．相互作用の強さとリンクの太さが対応している．ノード数  $N \leq 5$  においては閉路を持たない木構造ネットワークが得られたのに対し，ノード数  $N > 5$  では，閉路を持つネットワークが最適ネットワークとして得られた (図 1,2,3,4) ．



図 1:  $N = 4, k = 0.1$

図 2:  $N = 5, k = 0.1$



図 3:  $N = 6, k = 0.1$

図 4:  $N = 12, k = 0.1$

## 4 電力網モデル

電力を効率的に供給する「電力網モデル」の提案を行った．それぞれのノードを，電力を供給する発電所や，電力を消費する負荷として考える．基本のモデルと違い，ノード間の距離や送電線の太さを考慮したものととなっている．

まず、非負の対称行列でネットワークにおけるノード間の距離を表す隣接行列  $l$  を考える。ここで  $l_{ij}$  は行列  $l$  の各要素で、ノード間の距離を表す。  $l_{ij}$  と送電線の太さ  $r_{ij}$  から、  $A_{ij} = \frac{r_{ij}^2}{l_{ij}}$  と書き換えられる。また、リンクにかかるコスト  $V$  も計算し直す。

$$V = \sum_{i,j>i} l_{ij}(r_{ij})^2 \quad (5)$$

結果、  $r_{ij}$  についての  $H$  をポテンシャルとする変分系として以下を得られる。

$$\frac{dr_{ij}}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta r_{ij}} = \frac{2l_{ij}(Q_{ij}^2 - kr_{ij}^4)}{r_{ij}^3} \quad (6)$$

以上から、基本のモデルと同様の手順でネットワークを発展させることにより  $H$  を低下させる意味で、同期に適した電力網を自己組織的に得ることができる。

## 5 実行結果

図 5,6,7 は、ノード数  $N = 11$  として全結合ネットワークを電力網モデルに従って発展させて得られたネットワークである。  $k = 1.0, k = 4.0, k = 10.0$  として実行した。各ノードの色は固有振動数、つまり発電量を表しており、赤みが強いノードが発電所、青みが強いノードが負荷と捉えられる。矢印の根元から先のノードに向かって電気が流れていることになり、矢印が太いほど多くの電力のやりとりがあることになる。また、基本的には赤いノードから青いノードへ電力が流れている様子が見られるが、これは発電所から負荷へと電力が供給されている状況と一致する。

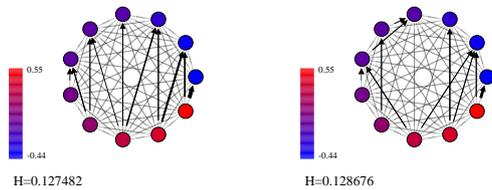


図 5: 0

図 6:  $N = 11, k = 4.0$

$N = 11, k = 1.0$

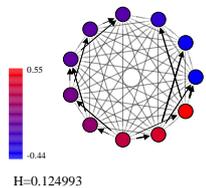


図 7:  $N = 11, k = 10.0$

$k$  の値が大きくなるほど、ノード間をショートカットしてつなぐ長いリンクが見られなくなっている。これは、  $k$  の値が大きくなるほど、送電線の建築コスト  $V$  を抑えようとする働きが大きくなるためだと考えられる。距離  $l_{ij}$  を導入することで、基本のモデルでは見られなかった  $k$  への依存性がはっきりと確認された。

最後に、ノードを実際の状況に近い配置にして発展させたところ、図 8 の電力網が得られた。四角が発電

所、丸が負荷を表している。  $k$  の値を大きくしていくと、最終的に木構造ネットワークとなった。

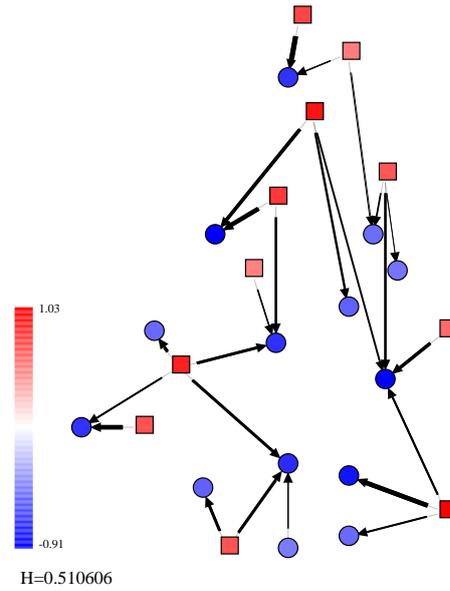


図 8: 最適な電力網。  $N = 25$  (発電所 11, 負荷 14),  $k = 0.1$

## 6 まとめと今後の課題

コスト関数  $H$  や、リンクの流れ  $Q_{ij}$  を取り入れた自己組織化モデルを提案し、実行したところ、ノード数  $N \leq 5$  では木構造ネットワーク、  $N > 5$  ではループを含む最適ネットワークが得られた。また、最適ネットワークの  $k$  依存性についても調査を行ったが、  $k$  の値を変えてもネットワーク構造自体に変化は見られなかった。

さらに、ノード間の距離  $l_{ij}$  を取り入れることで基本のモデルを改良し、最適な電力網を自己組織的に形成する「電力網モデル」の提案を行った。

得られたネットワークを観察したところ、基本のモデルで観察されなかった  $k$  依存性がはっきりと確認された。ノード間の距離  $l_{ij}$  を取り入れたことによる効果であると考えられる。

本研究によって、電力網のようにノードの位置が固定されているネットワークに対して、建築コストや同期の程度に関して効率の良い、最適なネットワークを自己組織的に得られるモデルの提案を行うことができた。  $k$  の値を変えることで、様々な状況における最適な電力網の設計に役立てることができる。

今後は実際のデータを活用した配置などでも最適ネットワークについて観察を行ってみたい。

## 参考文献

- [1] Tatsuo Yanagita and Takashi Ichinomiya, Thermodynamic characterization of synchronization-optimized oscillator networks. Phys. Rev. E 90, 062914, 2014.
- [2] Florian Dorfler, Michael Chertkov, and Francesco Bullo, Synchronization in complex oscillator networks and smart grid, PNAS vol.110 2005-2010