グラフの彩色多項式

理学専攻・情報科学コース　中田有紗

1　はじめに

グラフ理論において, 色数が与えられたときグラフが何通りに彩色できるか表す式を彩色多項式という. 本研究では一般的に知られている彩色多項式を, 分散彩色における彩色多項式に拡張した.

グラフの彩色
: 隣接する頂点同士が同じ色にならないように全頂点を塗ることを彩色という. 隣接する頂点とは, 同じ辺と接している頂点のことである.

分散彩色
: 距離 d まで違う色になるように塗る彩色を d-分散彩色という.

彩色多項式
: 彩色多項式とは, 与えられたグラフを与えられた色数内で彩色したときの彩色の組合せ数を表す式である. 彩色多項式は $P(G,t)$ で表され, グラフ G を t 色で彩色したときの組合せ数である.

以下, グラフ G を t 色で距離 d まで違う色になるように塗る塗り方の数を $P_d(G,t)$ と表す (一般的な $P(G,t)$ をここでは $P_1(G,t)$ と表す).

2　基本となる定義と命題

定義 頂点集合 $V(G)$, 辺集合 $E(G)$ のグラフ G について, グラフの各頂点に色番号を割り当てる関数

$$c : V(G) \to C = \{1, 2, \cdots, k\}$$

が「$xy \in E(G)$ ならば $c(x) \neq c(y)$」を満たすとき, c を G の彩色または k 彩色という.

定義 グラフ G の彩色 $c : V(G) \to C = \{1, 2, \cdots, k\}$ について

$$cd(c) \equiv \min\{d(x,y) | c(x) = c(y), x \neq y\}$$

を彩色距離という.

定義 彩色距離が $cd(c) > d$ を満たす彩色が存在するために必要な色数の最小値

$\chi_d(G) \equiv$

$\min\{k | G$ に $cd(c) > d$ を満たす $k-$彩色 c が存在 $\}$

を G の d-分散彩色数と呼び, χ_d で表す.

命題 グラフ G の d-分散彩色数は, G の距離 d 以下の頂点間を辺で結んだグラフ G^d の彩色数と等しい. つまり, グラフ G^d を

$$V(G^d) = V(G)$$

$$E(G^d) = \{xy | x, y \in V(G), d_G(x,y) \leq d\}$$

で定義されるグラフとすると,

$$\chi_d(G) = \chi(G^d)$$

を満たす.

命題 グラフ G から辺 e を削除して得られるグラフを $G - e$ とし, 縮約して得られるグラフを G/e としたとき

$$P_1(G,t) = P_1(G-e,t) - P_1(G/e,t) \qquad (1)$$

命題 グラフ G のある頂点 v が部分グラフ H の全ての頂点と隣接しているなら

$$P_1(G,t) = t \cdot P_1(H, t-1) \qquad (2)$$

3　彩色多項式

3.1　完全グラフの彩色多項式

完全グラフの彩色多項式について以下が知られている.

定理

n 個の頂点を持つ完全グラフを K_n とすると

$$P_1(K_n,t) = t(t-1)\cdots(t-(n-1)) \qquad (3)$$

証明

ある頂点 x_1 は t 色の中から任意に選ぶことが出来る. 次の頂点 x_2 は x_1 にぬった 1 色以外の $t-1$ 色から任意に選ぶことが出来る. 次の頂点 x_3 は x_1 と x_2 にぬった 2 色以外の $t-2$ 色から任意に選ぶことが出来る. 他も同様にすると, (3) 式が成り立つ.

完全グラフの d-分散彩色多項式について以下の結果が得られた.

定理

n 個の頂点を持つ完全グラフを K_n とすると, K_n の d-分散彩色多項式は

$$P_d(K_n,t) = t(t-1)\cdots(t-(n-1)) \qquad (4)$$

証明

完全グラフ K_n では全ての頂点が隣接しているため, $d \geq 2$ の場合, 距離 d 離れた頂点同士に新しく辺を付け加える必要がない. 従って完全グラフ K_n の d-分散彩色の彩色多項式は (3) 式と同じになる.

3.2　木の彩色多項式

木の彩色多項式について以下が知られている.

定理

n 個の頂点を持つ木 T を T_n とすると

$$P_1(T_n,t) = t(t-1)^{n-1} \qquad (5)$$

証明

まず, ある頂点 x_1 の色を t 色の中から任意に選ぶ. 次からはそれまでに選んだどれかの点に隣接する点を

塗る．木にはサイクルがないため, 2 つ目以降のどの点も 1 つだけ既に着色された点が隣接しているので $t-1$ 色の候補から選んで塗ることができる．従って (5) 式が成り立つ．

これを d-分散彩色における彩色多項式に一般化する場合, d-分散彩色の彩色数が最大次数によって異なることに注意する．ここでは木のなかでも以下のような特殊な場合についての一般化について示す．

定理

n 個の頂点を持つパス L を L_n とすると d-分散彩色での彩色多項式は

$$P_d(L_n,t)=\begin{cases} t(t-1)\ldots(t-(n-1)) & (n\leq d+1)\\ t(t-1)\ldots(t-(d-1))(t-d)^{n-d} & (n>d+1)\end{cases}$$

証明

$n\leq d+1$ のとき, 距離 d 離れた頂点同士を結ぶと完全グラフになるので, (4) 式の証明と同じになる． $n>d+1$ のとき, パスの頂点を端から順に $x_1,x_2,\cdots,x_d,\cdots,x_n$ としこの順に塗る． まず最初の頂点 x_1 は t 色から任意に選ぶことができる．次に $2\leq i\leq d$ については x_i の色は $t-(i-1)$ 色から選ぶことができる．残りの点 $x_{d+1},\cdots,x_n$ は, 前の d 個の頂点に塗った色以外の $t-d$ 色の中から任意に選ぶことが出来る．従って,

$$t(t-1)\ldots(t-(d-1))(t-d)^{n-d}$$

となる．

定理

n 個の頂点を持つ星グラフ S を S_n とすると d-分散彩色での彩色多項式は

$$P_d(S_n,t)=\begin{cases} t(t-1)^{n-1} & (d=1)\\ t(t-1)\cdots(t-(n-1)) & (d\geq 2)\end{cases}$$

証明

$d=1$ のとき, (5) 式の証明と同じである．$d\geq 2$ のとき, 距離 d 離れた頂点に新しく辺をつけ加えると完全グラフ K_n になる．従って (4) 式と同じになる．

3.3 サイクルの彩色多項式

サイクルの彩色多項式について以下が知られている．

定理

n 個の頂点を持つサイクル C を C_n とすると

$$P_1(C_n,t)=(t-1)^n+(-1)^n(t-1) \qquad (6)$$

証明

頂点の数の帰納法で証明する．$n=3$ なら C_3 は完全グラフ K_3 で, $P_1(C_3,t)=t(t-1)(t-2)=(t-1)^3-(t-1)$ となる．$n>3$ のとき, 辺を取り除くことで木になり, 彩色多項式は $t(t-1)^{n-1}$ になる． そして縮約は $n-1$ 頂点のサイクルを与える．帰納法の仮定より $n-1$ 頂点で成り立つとすると彩色多項式は $(t-1)^{n-1}-(-1)^n(t-1)$ となる．それゆえ, (1) 式より

$$\begin{aligned}P_1(C_d,t)&=t(t-1)^{n-1}-\{(t-1)^{n-1}+(-1)^{n-1}(t-1)\}\\&=(t-1)(t-1)^{n-1}+(-1)^n(t-1)\\&=(t-1)^n+(-1)^n(t-1)\end{aligned}$$

となる．

3.4 ホイールの彩色多項式

ホイールの彩色多項式について以下が知られている．

定理

n 個頂点をもつホイール W_n の彩色多項式は

$$P_1(W_n,t)=t(t-2)\{(t-2)^{n-2}+(-1)^{n-1}\} \quad (7)$$

証明

(2) 式において, n 個頂点をもつホイール W_n の中心の頂点を x とし, x 以外の頂点から成る $n-1$ 個の頂点のサイクル C_{n-1} を部分グラフ H とすると, $P_1(W_n,t)=t\cdot P_1(C_{n-1},t-1)$ となる．ここで, (6) 式において $n\to n-1, t\to t-1$ に置き換えて代入すると,

$$\begin{aligned}P_1(W_n,t)&=t\cdot P_1(C_{n-1},t-1)\\&=t\cdot\{((t-1)-1)^{n-1}+(-1)^{n-1}((t-1)-1)\}\\&=t(t-2)\{(t-2)^{n-2}+(-1)^{n-1}\}\end{aligned}$$

となる．

ホイールの分散彩色多項式について以下の結果が得られた．

定理

n 個の頂点をもつホイール W_n の d-分散彩色の彩色多項式は

$$P_d(W_n,t)=\begin{cases} t(t-2)\{(t-2)^{n-2}+(-1)^{n-1}\} & (d=1)\\ t(t-1)\cdots(t-(n-1)) & (d\geq 2)\end{cases}$$

証明

$d=1$ のとき (7) 式の証明と同じである．$d=2$ で非隣接な頂点をつなぐとホイール W_n は完全グラフ K_n になる．従って, $d\geq 2$ の d-分散彩色での彩色多項式は (4) 式と同じになる．

4 まとめと今後の課題

いくつかの特別なグラフについて, d-分散彩色多項式を求めた．今後はより一般的なグラフについての d-分散彩色多項式を求めたい．

参考文献

[1] R.A.Wilson, Graphs, Colourings and the Four-colour Theorem. Oxford University Press Reprinted 2004.