グラフの分散彩色の評価

理学専攻・情報科学コース
菊池智子

1 はじめに

並列計算機でシミュレーションをするときに、各計算機で擬似乱数を発生させて用いることがある。

例：核分裂の様子を調べるとき、空間を小さな区域に分割して、それぞれの領域での確率現象を、各計算機で生成した擬似乱数を用いて計算させる。

しかし、近くの現象を扱う計算機が、全く同じ擬似乱数列を生成していたら、それによる偏りがおきてしまう。相関が大きい場所では、なるべく違う関数で生成された擬似乱数を用いたい。何種類かの関数しかないときに、どのように割り振れば良いだろうか？

このような問題を解決するために、グラフの分散彩色アルゴリズムが必要とされている。

2 定義

本稿で扱う言葉の定義を以下のようにする。

定義 1 グラフとは、集合 $V = V(G)$ と集合 $E = E(G)$ のペアからなる $G = (V, E)$ で、$E \subset \{(a, b)|a, b \in V\}$ を満たすもののことである。そのグラフ G の有限単純無効グラフについて

$$c : V(G) \to C = \{1, 2, \cdots, k\}$$

で、「$xy \in E(G)$ ならば $c(x) \neq c(y)$ をみたす、c があるとき、G は k 彩色可能といい、この c を G の k-彩色という。

定義 2 グラフ G の彩色 $c : V(G) \to C = \{1, 2, \cdots, k\}$ について、

$$cd(c) := \min\{d(x, y) \mid c(x) = c(y), x \neq y\}$$

を彩色距離と呼ぶ。

定義 3 彩色距離が $cd(c) > d$ をみたす彩色が存在するために必要な色数の最小値

$$\chi_d(G) := \min\{k|G \text{ に } cd(c) > d \text{ を満たす } k\text{-彩色 } c \text{ が存在 }\}$$

を G の d-分散彩色数とよび、χ_d であらわす。

命題 1 グラフ G の d-分散彩色数は、G の距離 d 以下の頂点間を辺で結んだグラフ G^d の彩色数と等しい。つまり、グラフ G^d を

$$\begin{aligned} V(G^d) &= V(G) \\ E(G^d) &= \{xy|x, y \in V(G), d_G(x, y) \leq d\} \end{aligned}$$

で定義されるグラフとすると、

$$\chi_d(G) = \chi(G^d)$$

をみたす。

3 評価方法

分散彩色を評価する指標として、次のように定義される彩色の重みを提案する。

定義 4

$$w(c) := \sum_{c(x)=c(y)} \frac{1}{d(x, y)} \tag{1}$$

$$z(c) := \sum_{c(x)=c(y)} \frac{1}{d(x, y)^2} \tag{2}$$

$$a(c) := \sum_{c(x)=c(y)} \frac{1}{d(x, y)^{\frac{1}{2}}} \tag{3}$$

$w(c)$ は同色頂点間距離の逆数の和、$z(c)$ は同色頂点間距離の逆数の 2 乗の和、$a(c)$ は同色頂点間距離の逆数の $\frac{1}{2}$

同色頂点間距離が大きくなるにつれ、式 1、3 の値は小さくなる。つまり、彩色結果を評価したときにこれらの値が十分に小さければ、同色頂点間距離が大きい、良い分散彩色を与えていることになる。

4 彩色アルゴリズム

アルゴリズム 1 （WelshPowell のアルゴリズム）
このアルゴリズムは、高速に $\chi(G)$ に近い値で彩色をするアルゴリズムである。

次数の高い頂点から順に、そこから距離 1 の頂点に使われていない最小の色番号で彩色する。

入力：グラフ G ($|V(G)| = n$),
彩色に用いる色の数 k

1. $V(G) = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ が、$d(v_1 \geq) d(v_2 \geq ... \geq d(v_n))$ を満たすように並べ替える。
2. $i = 1$ とする。
3. $c = 1$ とする。
4. v_i の隣接点で色 c を持つものが存在しなければ、v_i に色 c を与えて (6) へすすむ。
5. $c = c + 1$ として (4) に戻る。
6. $i < P$ ならば、$i = i + 1$ として (2) に戻る。$i = P$ ならば終了。

出力：グラフ G の点彩色結果

アルゴリズム 2 （同色頂点間距離が必ず d 以上になるアルゴリズム）
このアルゴリズムは彩色したグラフに対し、$d-$ 分散彩色を与える。また、アルゴリズム中で $WelshPowell$ のアルゴリズムをしており、$\chi_d(G)$ を求めることができる。

入力：グラフ G ($|V(G)| = n$),
彩色に用いる色の数 k

1. 入力されたグラフに対し、各頂点間の距離を求め、参照しやすいように値を保存する。（以下、$list1$ と呼ぶ。）

2. 頂点間距離が $d(=1)$ ならば、辺を追加し、このグラフを G^d とする。(辺の追加時には、*list*1 を参照する。)

3. *WelshPowell* のアルゴリズムでグラフ G^d を彩色する。

4. 彩色数が k より少ないならば、d の値を 1 増やし、$2, 3$ を繰り返す。

5. 彩色数が k を超えたら、1 つ前の状態を返して終了。

出力：グラフ G の点彩色結果

アルゴリズム 3 （同色頂点間距離を大きくするアルゴリズム）

入力：グラフ G $(|V(G)| = n)$,
彩色に用いる色の数 k

1. 各頂点間の距離を求め、参照しやすいように値を保存する。(以下、*list*1 と呼ぶ。)

2. すべての頂点の色を c_1 とする。

3. *list*1 を参照しながら、同色頂点間距離の逆数の和の *list* を作成する。(以下、*list*2 と呼ぶ。)

4. 頂点の色を変更することで、彩色の重み $w(c)$ が小さくなるならば、色を変更する。

5. 色の変更にともない、*list*2 の更新を行う。

6. 4、5 を n 回繰り返したら終了。

出力：グラフ G の点彩色結果

アルゴリズム 4 （同色頂点間距離を大きくするアルゴリズム ）

アルゴリズム 3 の彩色の重み $w(c)$ を $z(c)$ にしたものを*アルゴリズム 5* とする。

アルゴリズム 5 （今回作成したアルゴリズム）

アルゴリズム 3 の彩色の重み $w(c)$ を $a(c)$ にしたものを*アルゴリズム 5* とする。

5 計算量

各アルゴリズムの計算量について考える。

WelshPowell のアルゴリズムの計算量

次数が降順になるように点に番号を付ける：計算量 $O(n)$。周りに使われていない色で順に彩色する：計算量 $O(n^2)$。

同色頂点間距離が必ず d 以上になるアルゴリズム (アルゴリズム 2) の計算量

list1 の作成:$O(n^3)$。グラフ G^d の作成:$O(n^2)$。次の 2 つは WelshPowell のアルゴリズムと同じである。次数が降順になるように点に番号を付ける：計算量 $O(n)$。周りに使われていない色で順に彩色する：計算量 $O(n^2)$。グラフ G^d と WelshPolwell のアルゴリズムを指定した色数を超える手前まで $G^d(d = 2, 3, \cdots)$ で繰り返す。

アルゴリズム 3 の計算量

list1 の作成:$O(n^3)$。頂点の色の初期化:$O(n)$。list2 の作成:$O(n^2)$。色の変更:$O(n)$。色の変更に伴う list2 の更新:$O(n)$。色の変更と、それに伴う list の更新については、n 回繰り返すので、この部分の計算量は $O(n^2)$ となる。

アルゴリズム 5 の計算量

彩色の重みを $w(c)$ から $z(c)$ に変更しただけなので、アルゴリズム 3 と同様。

6 彩色数

アルゴリズム 2 は彩色距離を大きくすることができ、アルゴリズム 3 は同色頂点間距離を大きくできる利点がある。

今回、6 点まですべてで作りうるグラフにおいて、アルゴリズム 2 を用いて彩色した。各点を固有のものとし、同型のグラフも異なる彩色をされるとする。たとえば n 点のグラフなら、グラフは $\frac{n(n-1)}{2}$ 通りある。

実行結果を表 1〜4 に示す。

表 1：頂点数 3 にたいして全通りの彩色

K	d=1	d=2
1	1	1
2	6	3
3	1	4

表 2：頂点数 4 にたいして全通りの彩色

K	d=1	d=2	d=3
1	1	1	1
2	40	9	9
3	22	28	16
4	1	26	38

表 3：頂点数 5 にたいして全通りの彩色

K	d=1	d=2	d=3	d=4
1	1	1	1	1
2	375	25	25	25
3	582	200	80	80
4	65	430	250	190
5	1	368	668	728

表 4：頂点数 6 にたいして全通りの彩色

K	d=1	d=2	d=3	d=4	d=5
1	1	1	1	1	1
2	5066	75	75	75	75
3	32377	1620	480	480	480
4	5152	6480	1860	1140	1140
5	171	13668	6888	4728	4368
6	1	10924	23464	26344	26704

7 比較

今回の彩色数の結果に対して、彩色の重みとして $w(c)$、$z(c)$、$a(c)$ の 3 つを提案している。どの評価方法がよりよいものなのだろうか？頂点数 6 までの全通りの場合と、頂点数が 100 で、辺の本数が最大 495 本のランダムな連結グラフを作成して本稿で比較する。

参考文献

[1] Martin Aigner : Discrete Mathematics