

# 回転する球殻内の流れのシミュレーション

戸澤 美幸 (指導教員: 河村 哲也)

## 1 はじめに

過去30年間の計算機の発達により、計算機を使って自然現象の解明や工学の諸問題の解決を図ることは、理論や実験といった古くからの研究手段とならぶ理学や工学に対する研究手段として定着しつつある。

特に、流体现象は、出現状況の多様さや、方程式の複雑性のため、計算手段による解明が重要になっている。

内側が回転している二重円筒間、二重球殻間の流れは、遠心分離機から地球、木星などの大気の流れのように多くの場所で見出される。しかし、回転速度により、様々なパターンを持つ流れであること、対称性が少し崩れた場合、単純な流れパターンでも流体粒子のカオス的な拡散を引き起こす流れであることが知られている。本研究では、数値計算によりこれらの流れの安定性を調べ、レイノルズ数による流れのパターンを見出すことを目標とした。

## 2 現象のモデル化

球殻内の流れを計算するため、球面座標系  $(r, \theta, \phi)$  を用いる。このモデルは直径の異なる2つの球を、内部の球のみ一定の角速度で同軸に回転させるものである。ここで、2つの球の距離を内側の球の半径の1/10とした。

## 3 計算方法

### 3.1 基礎方程式

質量保存を表す連続の方程式 (1)、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (2) を支配方程式として解くことができる。

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V} \quad (2)$$

( $\mathbf{v}$ : 速度ベクトル,  $P$ : 圧力,  $Re$ : レイノルズ数)

※レイノルズ数…物理的には流体の慣性力と粘性力の比を表わす。

球面座標系を用いて、Navier-Stokes の方程式を成分で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + R \\ &+ \nu \left( \nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 + \cot \theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \Theta \\ &+ \nu \left( \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_\phi}{dt} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \cdot \frac{\partial p}{\partial \phi} + \Phi \\ &+ \nu \left( \nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right), \end{aligned}$$

ただし、

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi},$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

本研究では MAC 法を用いた。MAC 法は速度・圧力について直接 Navier-Stokes 方程式を解くため、3次元問題にも適用でき、境界条件が課しやすい。

速度の計算には、高レイノルズ数においても安定した計算ができるように、Navier-Stokes 方程式の非線形項は、3次精度上流差分法 (3) を用いて近似した。

$$\begin{aligned} f \frac{\partial u}{\partial x} &\sim f \frac{-u_{i+2} + 8(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}}{12\Delta x} \\ &+ \frac{|f|}{12} \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x} \quad (3) \end{aligned}$$

### 3.2 格子生成

計算格子は図1の領域内を半径  $(r)$  方向に32分割、緯度  $(\theta)$  方向  $(0 \sim 360^\circ)$  に74分割、経度  $(\phi)$  方向  $(0 \sim 180^\circ)$  に76分割とした。

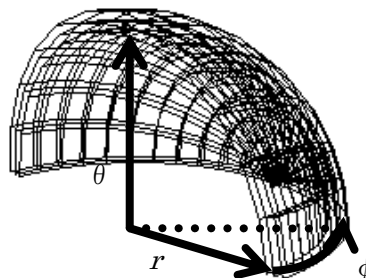


図1 計算格子

(※見やすさのため格子を粗くし、一部のみ表示。)

## 4 境界条件

内球表面では、 $\phi$ 方向に回転速度 $v_\phi$ を与えた。

外球表面は フリースリップ条件とする。

## 5 計算結果

本研究では  $dt=0.0025$  と固定して、レイノルズ数 ( $Re$ ) の値を変化させ、球殻内部の流れに着目した。半径 ( $r$ ) 方向、緯度 ( $\theta$ ) 方向、経度 ( $\phi$ ) 方向の流れにそれぞれについて速度の等値線を調べたところ、大きく分けて以下の4つの流れのパターンを得た。

### 5.1 平行な定常流

低いレイノルズ数の値においては、軸方向に周期的な流れがみられた。

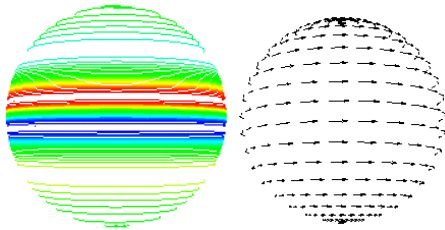


図2 平行な定常流( $\theta$ ),  $Re=15000$

### 5.2 定常な渦流

レイノルズ数を高くしていくと、流れは規則正しい周期的な層流を形成した。

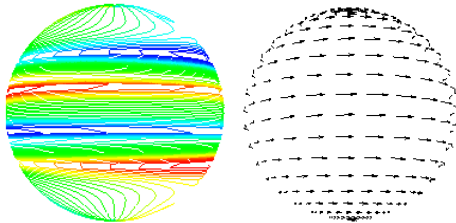


図3 定常な渦流( $\theta$ ),  $Re=35000$

### 5.3 波動を伴う非定常渦流

高いレイノルズ数の値において様々な渦流が形成された。非周期的で、はっきりと層流・乱流部分とに分かれる。乱流領域は不規則に発生、消滅、または規則的な模様を保ちながら、全体が回転した。

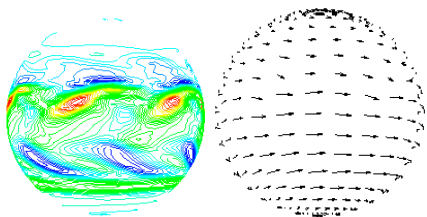


図4 非定常渦流 ( $r$ ),  $Re=80000$

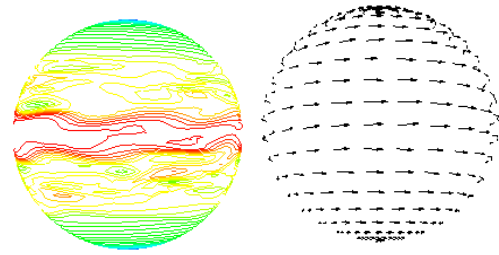


図5 非定常渦流 ( $\phi$ ),  $Re=90000$

### 5.4 非周期的な乱流

これ以上の遷移は起こらない。ただし、軸方向の周期性はかなり高いレイノルズ数の値 ( $Re=100000$ ) までは残っている。

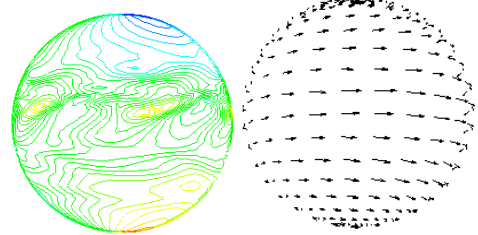


図6 乱流 ( $\theta$ ),  $Re=10000$

また、高いレイノルズ数の値においては、図7のように流れのパターンの遷移が時間経過とともに起こった。

半径( $r$ )方向	緯度( $\theta$ )方向	経度( $\phi$ )方向
平行な定常流	平行な定常流( $\theta$ )	平行な定常流
定常な渦流	定常な渦流	
非定常渦流( $r$ )	非定常渦流( $\theta$ )	非定常渦流( $\phi$ )
乱流	乱流( $\theta$ )	乱流

図7 高レイノルズ数での流れの遷移

## 6 まとめと今後の課題

本研究では回転する球殻内の流れをシミュレーションすることができた。その中で、レイノルズ数が高くなるにつれて、流れはより不安定に、規則的な流れから不規則変動を含む流れへ遷移する4つの流れのパターンを見出すことができた。今後は、パターンが遷移するレイノルズ数の値(臨海値)をより精密に調べたい。また、安定性を定量的に解析できる方法をも考えていきたい。

### 謝辞

本研究を行うにあたり、ご尽力くださいました指導教員の河村先生に深く感謝いたします。

### 参考文献

- [1] 巽友正, 「流体力学」(2005), 培風館.
- [2] 安藤常代, 「流体の力学」(2006), 培風館.
- [3] 河村哲也, 「数値シミュレーション入門」, (2006), サイエンス社.