対称λ計算、計算論的古典性

上田やよい　(指導教員：浅井健一)

1　はじめに

継続とは、計算のある時点における残りの計算を表す。1990 年に古典論理との対応関係が示されて以降 [3]、その古典性が注目されるようになる。1992 年に $\lambda\mu$ 計算が提唱され [4]、[1] ではシークエント計算による定式化で項と継続の対称性が示された。2003 年、2005 年には Wadler が Dual Calculus を提唱し、Call-By-Value と Call-By-Name の対称性を示した [5][6]。近年では、例外処理などを理論的に扱えることでも注目されている。

対称λ計算（Symmetric Lambda Calculus: SLC）は、項と継続が完全な対称形を成しており、項を扱うのと全く同様に継続を扱うことができる。1989 年に Filinski によって初めて提唱され [2]、阪上らによって small-step semantics で定式化し直された [7]。[8] では対称λ計算が他の継続計算の体系と同様に古典論理に対応することが示されている。

本論文では、SLC が古典性と Dual Calculus のような対称性を併せ持つことを示す。具体的には、SLC と Dual Calculus の型及び式を互いに変換できることを示し、その semantics が等価であることを示す。

2　SLC

SLC の型は以下のように定義される。

$$
\begin{array}{rcll}
S & ::= & +T & (\text{項 } e \text{ の型}) \\
 & | & \{{}^{+A\rightarrow +B}_{\neg A\leftarrow \neg B} & (\text{関数 } f \text{ の型}) \\
 & | & \neg T & (\text{継続 } c \text{ の型}) \\
T, A, B & ::= & \bot \mid \top \mid X & \\
 & | & A \wedge B \mid A \vee B \mid A \rightarrow B \mid A - B &
\end{array}
$$

型は大きく 3 つに分けられ、関数を中心に項と継続が対称になるように定義される。$-$ の定義は以下。

$$A - B \equiv \neg(\neg B \rightarrow \neg A)$$

同様に SLC 式も項 e と継続 c が対称形を成すように定義される。

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{項} & e & ::= & \circ_{l_x:T} \mid x \mid (e,\, e) \mid \lceil f \rceil \mid e \uparrow f \\
\text{項関数} & f_e & ::= & g \mid p_x \Rightarrow e \mid \overline{e} \\
\text{関数} & f & ::= & f_e \mid f_c \mid inl \mid inr \mid fst \mid snd \\
\text{継続関数} & f_c & ::= & h \mid c \Leftarrow p_y \mid \underline{c} \\
\text{継続} & c & ::= & \bullet_{l_y:T} \mid y \mid (c,\, c) \mid \lfloor f \rfloor \mid f \downarrow c
\end{array}
$$

関数 f は項に対する関数 f_e と継続に対する関数 f_c, プリミティブ関数から成り、f_e と f_c が対称になっている。p_x, p_y は以下のようなパターンマッチである。

$$
\begin{array}{rcl}
p_x & ::= & x \mid \lceil g \rceil \mid (x_1,\, x_2) \\
p_y & ::= & y \mid \lfloor h \rfloor \mid (y_1,\, y_2)
\end{array}
$$

SLC の計算規則は項と継続の二つ組 $\langle\ e \mid c\ \rangle$ または項、関数、継続の三つ組 $\langle\ e \mid f \mid c\ \rangle$ で表される。

3　Dual Calculus

Dual Calculus の型は古典論理のシークエント計算と対応した形で定義される。

$$A, B ::= \bot \mid \top \mid X \mid A \,\&\, B \mid A \vee B \mid \neg A \mid A \supset B$$

Dual Calculus の式は Term

$$
\begin{array}{rcl}
M, N & ::= & x \mid \langle M,\, N \rangle \mid \langle M \rangle inl \mid \langle N \rangle inr \\
 & | & [K]not \mid \lambda x.N \mid (S).\alpha
\end{array}
$$

Coterm

$$
\begin{array}{rcl}
K, L & ::= & \alpha \mid [K,\, L] \mid fst[K] \mid snd[L] \\
 & | & not\langle M \rangle \mid M \,@\, L \mid x.(S)
\end{array}
$$

Statement

$$S, T \quad ::= \quad M \bullet K$$

から成る。

4　変換の方針

変換規則は semantics 上での等価性を保存するように定義するため、評価戦略 Call-By-Value, Call-By-Name によって 2 種類の規則が存在する。

各変換規則では、項は項に、継続は継続に変換される。SLC の関数 f については対応するものがないので、式の形によって項か継続に変換される。またこの際、型が古典論理上で保存されるように規則を定める。

SLC には否定型 $\neg$ が継続にしか存在せず、Dual Calculus には $-$ 型が存在しないため、それぞれの体系にこれらの型をマクロとして導入する。同様に、これらの型に対応する式もマクロとして導入する。

SLC に導入するマクロは以下。

$$
\begin{array}{rcl}
\neg A & \equiv & \top \dot{-} A \\
(c)not & = & \circ_\top \uparrow (h \downarrow c \Leftarrow \lfloor h \rfloor) : +(\top \dot{-} A) \\
not(e) & = & \lfloor x \Rightarrow e \rfloor : \neg(\top \dot{-} A)
\end{array}
$$

Dual Calculus に導入するマクロは以下。

$$
\begin{array}{rcl}
A - B & \equiv & A \,\&\, \neg B \\
\kappa\alpha.K & = & z.(z \bullet snd[not\langle (z \bullet fst[K]).\alpha \rangle]) \\
M \,ⓑ\, L & = & \langle M,\, [L]not \rangle
\end{array}
$$

5　変換規則

SLC から Dual Calculus への型の変換規則は以下。

$$
\begin{array}{rcl}
(+T)_\dagger & = & T_\star \\
(\{{}^{+A\rightarrow +B}_{\neg A\leftarrow \neg B})_\dagger & = & A_\star \supset B_\star
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
(\neg T)_\ddagger & = & T_\star \\
(\{{}^{+A\rightarrow +B}_{\neg A\leftarrow \neg B})_\ddagger & = & A_\star - B_\star
\end{array}
$$

$$\begin{array}{rclrcl}
\top_\star & = & \top & \bot_\star & = & \bot \\
X_\star & = & X & (\top \mathbin{\dot{-}} A)_\star & = & \neg A_\star \\
(A \wedge B)_\star & = & A_\star \,\&\, B_\star & (A \vee B)_\star & = & A_\star \vee B_\star \\
(A \to B)_\star & = & A_\star \supset B_\star & (A - B)_\star & = & A_\star - B_\star
\end{array}$$

Dual Calculus から SLC への型の変換規則は以下。

$$A^\dagger \;=\; +A^\star \qquad A^\ddagger \;=\; \neg A^\star$$

$$\begin{array}{rclrcl}
\top^\star & = & \top & \bot^\star & = & \bot \\
X^\star & = & X & (\neg A)^\star & = & \top \mathbin{\dot{-}} A^\star \\
(A \,\&\, B)^\star & = & A^\star \wedge B^\star & (A \vee B)^\star & = & A^\star \vee B^\star \\
(A \supset B)^\star & = & A^\star \to B^\star & (A - B)^\star & = & A^\star - B^\star
\end{array}$$

式に対する変換規則は、スペースの都合上省略する。

6 定理

定理 6.1

1. $\Gamma \to \Theta \mid M : A$ かつ $\Gamma \to \Theta \mid N : A$ のとき $M =_v N$ ならば $\Gamma^\dagger, \Theta^\ddagger \vdash R^e_{+A^\star}(\mathcal{E}[\![M]\!], \mathcal{E}[\![N]\!])$
2. $K : A \mid \Gamma \to \Theta$ かつ $L : A \mid \Gamma \to \Theta$ のとき $K =_v L$ ならば $\Gamma^\dagger, \Theta^\ddagger \vdash R^c_{\neg A^\star}(\mathcal{C}[\![K]\!], \mathcal{C}[\![L]\!])$
3. $\Gamma \mid S \mapsto \Theta$ かつ $\Gamma \mid T \mapsto \Theta$ のとき $S =_v K$ ならば $\langle\, v_x \mid \mathcal{S}[\![S]\!] \mid k_\alpha \,\rangle \approx \langle\, v_x \mid \mathcal{S}[\![T]\!] \mid k_\alpha \,\rangle$

定理 6.2

1. $\Gamma \vdash e_1 : +T$ かつ $\Gamma \vdash e_2 : +T$ のとき $\Gamma \vdash R^e_{+T}(e_1, e_2)$ ならば $\mathbf{E}[\![e_1]\!] : T_\star =_v \mathbf{E}[\![e_2]\!] : T_\star$
2. $\Gamma \vdash c_1 : \neg T$ かつ $\Gamma \vdash c_2 : \neg T$ のとき $\Gamma \vdash R^c_{\neg T}(c_1, c_2)$ ならば $\mathbf{C}[\![c_1]\!] : T_\star =_v \mathbf{C}[\![c_2]\!] : T_\star$
3. $\Gamma \vdash f_1 : \left\{\begin{smallmatrix}+A\to+B\\ \neg A\leftarrow\neg B\end{smallmatrix}\right.$ かつ $\Gamma \vdash f_2 : \left\{\begin{smallmatrix}+A\to+B\\ \neg A\leftarrow\neg B\end{smallmatrix}\right.$ のとき $\Gamma \vdash R^f_{A\to B}(f_1, f_2)$ ならば $\mathbf{F^e}[\![f_1]\!] : A_\star \supset B_\star =_v \mathbf{F^e}[\![f_2]\!] : A_\star \supset B_\star$
4. $\Gamma \vdash f_1 : \left\{\begin{smallmatrix}+A\to+B\\ \neg A\leftarrow\neg B\end{smallmatrix}\right.$ かつ $\Gamma \vdash f_2 : \left\{\begin{smallmatrix}+A\to+B\\ \neg A\leftarrow\neg B\end{smallmatrix}\right.$ のとき $\Gamma \vdash R^f_{A\to B}(f_1, f_2)$ ならば $\mathbf{F^c}[\![f_1]\!] : A_\star - B_\star =_v \mathbf{F^c}[\![f_2]\!] : A_\star - B_\star$
5. $\langle\cdots\rangle_1 \approx \langle\cdots\rangle_2$ ならば $\mathbf{T}[\![\langle\cdots\rangle_1]\!] =_v \mathbf{T}[\![\langle\cdots\rangle_2]\!]$

定理 6.3

1. $\Gamma \to \Theta \mid M : A$ のとき以下が成り立つ。

$$(\Gamma^\dagger)_\dagger, \Lambda \to (\Theta^\ddagger)_\ddagger, \Delta \mid \mathbf{E}[\![\mathcal{E}[\![M]\!]]\!] : A$$

$$\mathbf{E}[\![\mathcal{E}[\![M]\!]]\!] =_v M$$

2. $K : A \mid \Gamma \to \Theta$ のとき以下が成り立つ。

$$\mathbf{C}[\![\mathcal{C}[\![K]\!]]\!] : A \mid (\Gamma^\dagger)_\dagger, \Lambda \to (\Theta^\ddagger)_\ddagger, \Delta$$

$$\mathbf{C}[\![\mathcal{C}[\![K]\!]]\!] =_v K$$

3. $\Gamma \mid S \mapsto \Theta$ のとき以下が成り立つ。

$$\Lambda \mid \mathbf{T}[\![\langle\, v_x \mid \mathcal{S}[\![S]\!] \mid k_\alpha \,\rangle]\!] \mapsto \Delta$$

$$\mathbf{T}[\![\langle\, v_x \mid \mathcal{S}[\![S]\!] \mid k_\alpha \,\rangle]\!] =_v S$$

定理 6.4

1. $\Gamma, \Theta \vdash e : +T$ のとき以下が成り立つ。

$$(\Gamma_\dagger)^\dagger, \Lambda, (\Theta_\ddagger)^\ddagger, \Delta \vdash \mathcal{E}[\![\mathbf{E}[\![e]\!]]\!] : +T$$

$$(\Gamma_\dagger)^\dagger, (\Theta_\ddagger)^\ddagger \vdash R^e_{+T}(\mathcal{E}[\![\mathbf{E}[\![e]\!]]\!][v_x/p_x, k_\alpha/p_\alpha],\, e)$$

2. $\Gamma, \Theta \vdash c : \neg T$ のとき以下が成り立つ。

$$(\Gamma_\dagger)^\dagger, \Lambda, (\Theta_\ddagger)^\ddagger, \Delta \vdash \mathcal{C}[\![\mathbf{C}[\![c]\!]]\!] : \neg T$$

$$(\Gamma_\dagger)^\dagger, (\Theta_\ddagger)^\ddagger \vdash R^c_{\neg T}(\mathcal{C}[\![\mathbf{C}[\![c]\!]]\!][v_x/p_x, k_\alpha/p_\alpha],\, c)$$

3. $\Gamma, \Theta \vdash f : \left\{\begin{smallmatrix}+A\to+B\\ \neg A\leftarrow\neg B\end{smallmatrix}\right.$ のとき以下が成り立つ。

$$(\Gamma_\dagger)^\dagger, \Lambda, (\Theta_\ddagger)^\ddagger, \Delta \vdash \mathcal{E}[\![\mathbf{F^e}[\![f]\!]]\!] : +(A \to B)$$

$$(\Gamma_\dagger)^\dagger, (\Theta_\ddagger)^\ddagger \vdash R^f_{\left\{\begin{smallmatrix}+A\to+B\\ \neg A\leftarrow\neg B\end{smallmatrix}\right.}(\overline{\mathcal{E}[\![\mathbf{F^e}[\![f]\!]]\!]}[v_x/p_x, k_\alpha/p_\alpha],\, f)$$

4. $\Gamma, \Theta \vdash f : \left\{\begin{smallmatrix}+A\to+B\\ \neg A\leftarrow\neg B\end{smallmatrix}\right.$ のとき以下が成り立つ。

$$(\Gamma_\dagger)^\dagger, \Lambda, (\Theta_\ddagger)^\ddagger, \Delta \vdash \mathcal{C}[\![\mathbf{F^c}[\![f]\!]]\!] : \neg(A - B)$$

$$(\Gamma_\dagger)^\dagger, (\Theta_\ddagger)^\ddagger \vdash R^f_{\left\{\begin{smallmatrix}+A\to+B\\ \neg A\leftarrow\neg B\end{smallmatrix}\right.}(\underline{\mathcal{C}[\![\mathbf{F^c}[\![f]\!]]\!]}[v_x/p_x, k_\alpha/p_\alpha],\, f)$$

5. $\vdash \langle\cdots\rangle$ のとき以下が成り立つ。

$$\vdash \langle\, v_x \mid \mathcal{S}[\![\mathbf{T}[\![\langle\cdots\rangle]\!]]\!] \mid k_\alpha \,\rangle$$

$$\langle\, v_x \mid \mathcal{S}[\![\mathbf{T}[\![\langle\cdots\rangle]\!]]\!] \mid k_\alpha \,\rangle \approx \langle\cdots\rangle$$

参考文献

[1] Pierre-Louis Curien and Hugo Herbelin. The duality of computation. In *ICFP '00: Proceedings of the fifth ACM SIGPLAN international conference on Functional programming*, pages 233–243, New York, NY, USA, 2000. ACM.

[2] Andrzej Filinski. Declarative continuations and categorical duality. Diku report 89/11, University of Copenhagen, August 1989.

[3] Timothy G. Griffin. A formulae-as-type notion of control. In *POPL '90: Proceedings of the 17th ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages*, pages 47–58, New York, NY, USA, 1990. ACM.

[4] Michel Parigot. λμ-calculus: An algorithmic interpretation of classical natural deduction. In *LPAR '92: Proceedings of the International Conference on Logic Programming and Automated Reasoning*, pages 190–201, London, UK, 1992. Springer-Verlag.

[5] Philip Wadler. Call-by-value is dual to call-by-name. In *ICFP*, pages 189–201, August 2003.

[6] Philip Wadler. Call-by-value is dual to call-by-name - reloaded. In *RTA*, pages 185–203, April 2005.

[7] 阪上紗里 and 浅井健一. 対称λ計算の基礎理論. **コンピュータソフトウェア**, 26(2):3–17, May 2009.

[8] 上田やよい and 浅井健一. 型付き対称λ計算と古典論理. In *PPL 2010:* **第 *12* 回プログラミングおよびプログラミング言語ワークショップ**, pages 34–48, March 2010.