

# 双安定系の転移現象：てんかんの理解を目指して

中島由貴 (指導教員：郡宏)

## 1 はじめに

テレビを見ていた子どもたちが周期的な強い視覚刺激によっててんかんを起こした「ポケモンショック」と呼ばれる事件があった。てんかんは脳の神経活動の異常に興奮した、同期した活動が原因であると言われている。脳では活動の弱い状態と異常に興奮した状態の双方が安定状態として存在している。ここで何らかの外部摂動を加えると静止状態にあった脳の神経活動が興奮状態へと転移することがあり、これによっててんかん発作が起これと考えられる。これにはいくつか方法があり、過呼吸法、睡眠法、光刺激法、薬物法などが代表例として挙げられる。てんかんの異常脳波の観測には光刺激法がよく用いられる。[1]

先行研究では [2] 神経細胞の膜電位がより分極した状態であるダウン状態 (細胞がほとんど発火しない状態) と、もう一方の状態であるアップ状態 (細胞がよく発火する状態) の二つの状態間の転移現象について説明を行っている。ここではラットとブタの小脳にあるプルキンエ細胞において、細胞の状態と同じ方向の刺激を与えた場合であっても、その時の細胞の状態に応じて逆方向の遷移を引き起こすことを示している。

本研究ではこのような動的状態の転移現象についてより深い理解を得るため、2つの状態を安定状態として持つ双安定系の数理モデルを数値的に解析する。

## 2 双安定系の数理モデルの解析

本研究ではまず、双安定系を実現する簡単な数理モデルを考え、一方の状態から他方の状態への転移について調べた。

### 2.1 モデル

本研究では、まず以下のモデルを使用した。

$$\frac{dx}{dt} = -x(x-a)(x+b) + \mu\xi(t). \quad (1)$$

ここで  $x(t)$  は状態変数、 $a$  及び  $-b$  は安定固定点を定めるパラメータ ( $a, b > 0$ )、 $\xi(t)$  は白色ガウスノイズ、 $\mu$  はノイズ強度を表す。 $a$  と  $b$  の値は  $x$  を変数変換することで自由にリスケールできるため、 $a+b$  の値を固定しても一般性を失わない。ここでは  $a+b=2, a \geq b$  に設定する。

### 2.2 シミュレーション結果

まず  $\mu = 0.1, 0 \leq t \leq 50$  で固定した状態でシミュレーションを行った。

$a = 1.7$  とした時の結果を図 1 に示した。 $a$  の値についてはもっとも綺麗にジャンプが見られたのが  $a = 1.7$  だったためこの値を採用している。 $x$  の値が  $-b$  の固定点から  $a$  の固定点にジャンプしていることが確認できる。そこで次に  $a$  の値を変えていき転移の頻度やグラフの形状がどう変化するかを見ていく。また、図 1 はシミュレーション一回のみの結果なので、試行回数を 100 まで増やしてシミュレーションを行った。

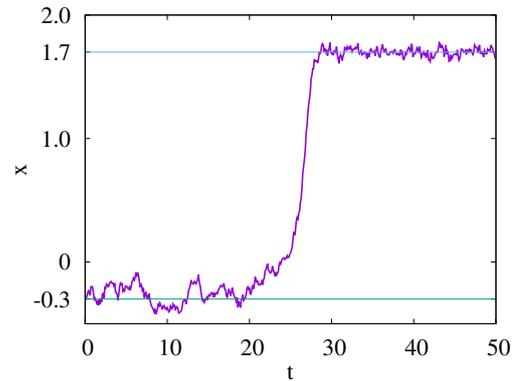


図 1: 縦軸は  $x$  の値、横軸は時間  $t$ .

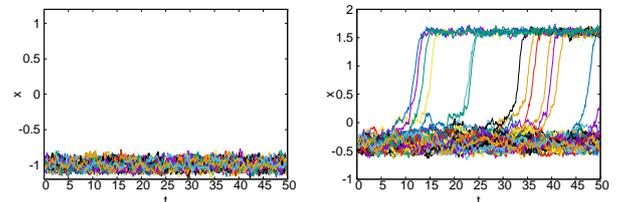


図 2: (左図)  $a = b = 1.0$  (右図)  $a = 1.6, b = 0.4$

ノイズ強度を  $\mu = 0.1$ 、試行回数を 100 とした上で  $a$  の値によってジャンプの様子が変わるかを図 2 に示した。 $a = 1.0$  のグラフと比べ  $a = 1.6$  のグラフは頻繁に固定点間のジャンプが起こっているのがわかる。他の  $a$  の値についても  $a$  が大きくなるほど、つまり固定点同士の安定度の差が大きくなるほどジャンプの回数が増えていく。また、グラフの形状から相対的に不安定な固定点からより安定した固定点への転移がほとんどであることが読み取れる。

ここまでの結果から直感的な感覚と同様に固定点の安定性が低い方から高い方へと転移が起こりやすく、安定性が等しい場合は転移が起こりづらいことが確認できた。

次に、 $a$  の値だけでなくノイズ強度  $\mu$  によっても転移現象に変化が起こるのか確かめるため、 $a$  及び  $\mu$  の値を変えていった時の最初のジャンプに掛かるまでの時間を見た。ここでは先に示したモデルのシミュレーションを行って、 $x > 6$  となった  $t$  を『転移が起こった時間』と定める。これを 100 回繰り返して、平均値  $t$  を調べた。

$\mu = 0.1, \mu = 0.2, \mu = 0.3$  とした時の、最初の固定点間のジャンプが起こるまでの時間の平均を図 3 に示したグラフの縦軸はわかりやすいように対数スケールに変更している。

これより  $\mu = 0.2, \mu = 0.3$  の時は  $a$  の値の増加に対して急激に減少していくのが分かる。減少は  $t = 10$  付近になるまでが特に顕著であり、それ以降はなだらかな降下となっている。

また、 $\mu = 0.1$  の場合は  $1.2 \leq a \leq 1.4$  の間で  $t$  が大

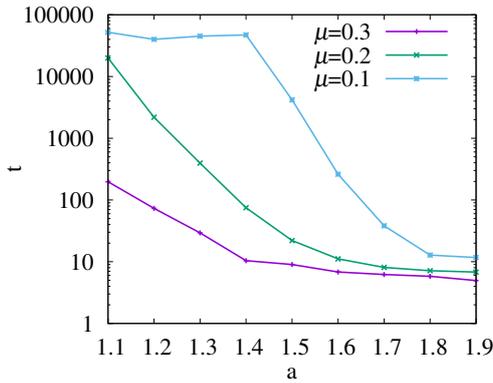


図 3: 縦軸は  $t$  (対数スケール), 横軸は時間  $a$ .

きくなるなど直感とは異なる結果を示した。これに関しては試行回数及び  $t$  の上限の設定が正しくなかったことに起因すると推測しているが、詳しいことはまだ調べていない。

### 3 双安定系と周期外力

次に当初の目的であった、振動状態と静止状態の双安定系の転移現象について解析を行った。ここでは特に、周期的な外部刺激が、静止状態から振動状態への転移を促進するか検証した。

#### 3.1 モデル

次のモデルを考えた。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon x - \omega y + Ax - A^2x + K \sin \Omega t + \mu \xi(t) \quad (2) \\ \dot{y} &= \omega x - \varepsilon y + Ay - A^2y. \quad (3) \end{aligned}$$

ここで  $(x(t), y(t))$  は状態変数,  $A(t) = x^2 + y^2$ ,  $\varepsilon$  は静止状態  $(x, y) = (0, 0)$  の安定性を決定するパラメータ,  $\omega$  は固有振動数,  $K$  は外力の強さ,  $\Omega$  は周期外力の強さ,  $\mu$  はノイズ強度である。この系は  $\varepsilon$  を小さな負の値に設定すると、静止状態と高振幅の振動状態をともに安定解として持つ。ここでは  $\varepsilon = -0.1$ ,  $\omega = 1$ ,  $K = 0.01$ ,  $\mu = 0.13$  に設定した。

#### 3.2 シミュレーション結果

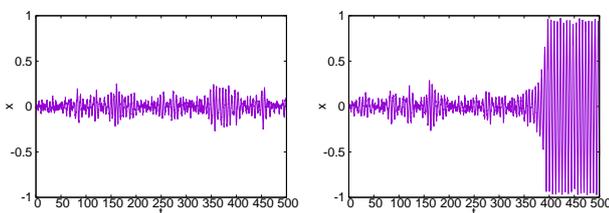


図 4: (左図) 周期外力無し (右図) 周期外力あり

モデルのシミュレーションの時系列を表したグラフを図 4 に示した。縦軸は  $x$ , 横軸が時間  $t$  を表している。左図と比べ、周期外力  $\Omega = 0.95$  を与えた右図は転移が起こっている様子がはっきりと確認できる。

次に、初期条件  $x = y = 0$ , 試行回数 100 回として、 $\Omega$  の値を変えた時に転移が起こる確率を図 5 に示した。

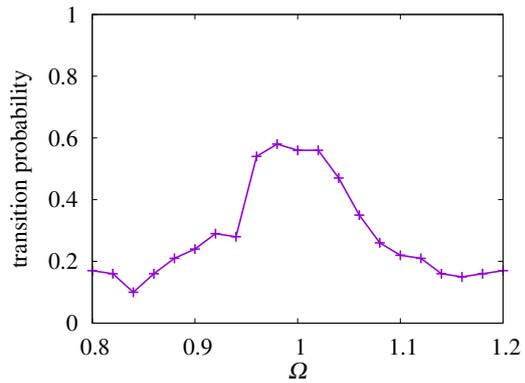


図 5: 縦軸は  $\Omega$ , 横軸は転移確率.

$\omega$  の値に近い  $\Omega = 1$  付近では固定点間で転移する確率が大きくなっていることがわかる。特に共鳴振動数である  $\Omega = \omega$  付近で転移確率が急激に増加している。 $\Omega \approx \omega$  では共鳴によってある程度強い振動が生じ、それによって強い振動状態への転移が促されたと考えられる。

### 4 まとめと今後の課題

双安定系の数理モデルを用いた固定点間の転移現象について調べた。

直感と同じく二つの固定点の安定性が崩れるほど転移が起こりやすく、その固定点間のジャンプはほとんどが安定性の低い方から高い方への一方的なものだった。また、 $a$  の値を大きくすればするほど最初のジャンプまでに掛かる時間は急激に短くなり、ノイズの強さを変えても  $\mu = 0.1$  の例外を除くとグラフの形はほとんど同じ形状となった。

次に、静止状態にある安定系に固有振動数  $\omega$  と近い周期外力  $\Omega$  を与えると振動状態への転移が見られた。これは共鳴によって生じた振動が原因であると考えられ、この振動状態への転移の確率は  $\Omega = \omega$  付近で急激に増加している。

今回は相対的に不安定な方から安定な方への転移に注目して解析を行ったが、逆の転移を全く想定していない状態のため、相対的に不安定な方への転移が起こり得るのかについて調べてみたい。また、実際の脳神経とのリンクが少ない状態のため、脳神経への置き換えについても考察できたらと思う。

### 参考文献

- [1] 蔵本由紀 [編]. 「リズム現象の世界」. 東京大学出版会, 2005.
- [2] 内田豪. 神経細胞の膜電位がもつ双安定性と状態遷移: その仕組みと情報処理における役割. 生物物理, Vol. 47, No. 6, pp. 362-367, 2007.