サッカーの最適戦略の数理的研究

堀之内あゆ　(指導教員：郡宏)

1　はじめに

サッカーの試合では有力な選手がいるだけで勝つことができるわけではなく, 勝利につながるような有効な戦術が存在する. しかし, 経験的に有効な戦術だと知られていても, その有効性は証明されていない. そこで私は, サッカーの戦術の有効性が, フォーメーションやプレーヤーの上手さなどのパラメータにどのように依存するのかを数理的に検証したいと考えた.

本研究では, サッカーの戦術で有効な攻撃パターンの１つの, サイド攻撃に注目した. 実際には, サイド攻撃は複雑なダイナミクスとなる現象だが, ここでは, ディフェンダーとオフェンダーの能力関係によってどのような最適な配置が得られるかを, コスト関数を用いて明らかにすることを試みた. コスト関数を用いて, 古くから最適施設配置等の研究が数多く行われている.[1]

2　コスト関数

サイド攻撃とは, 攻撃側のプレーヤーが行う戦術である. 図 1 のように, 攻撃側のプレーヤーは 2 人で, 1 人がシュートを狙うオフェンダーで, もう 1 人はボールを持ったプレーヤーであり, ディフェンダーのいる方向に攻めていると仮定する. オフェンダーは, ボールを持ったプレーヤーからパスを受けてシュートすることが目標である.

サイド攻撃では, シュートを狙うオフェンダーとボールを持ったプレーヤーが離れているため, 両方を確認するのが難しい. オフェンダーを注視するとボールを見失い, ボールを注視するとオフェンダーの動きに対応することが難しくなる. したがって, サイド攻撃においてディフェンダーは, オフェンダーとボールの異なる方向の動きに同時に対応するため, 対応が難しくなると考えられる. 一方, サイド攻撃にはパスの距離が伸びるという攻撃側にとってのリスクもある.

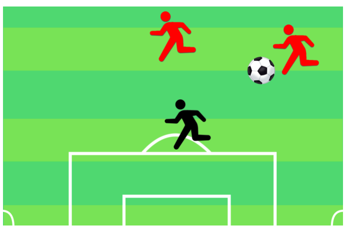

図 1: オフェンダー（パスの受け手と出し手）, ディフェンダーの位置関係. 2 名のオフェンダーはディフェンダーから等距離 1 にいるとし, パスの受け手はデフェンダーの正面に固定.

サイド攻撃のコスト関数を与える (図 2 参照).

$$H = (1 - K)f(\theta) + Kg(L) \tag{1}$$

ここで, $f(\theta)$ はディフェンスのしやすさ, $g(L)$ はパスのリスクの大きさを表す関数で, それぞれ, ディフェンスから見た攻撃者 2 名のなす角度 θ と, 攻撃者間の距離 L の関数であるとする (図 2). また, パラメータ K $(0 \le K \le 1)$ はこれら 2 つのコストの重みを調整するパラメータで, K が大きいほどパスのリスクが大きな重みを持つので, 攻撃者側の下手さを表すパラメータであると解釈できる.

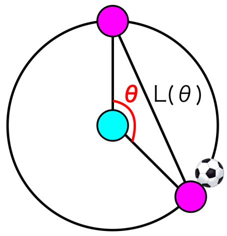

図 2: コスト関数の概略.

ここでは, $f(\theta) = \cos\theta$, $g(L) = L^{\alpha}$ と設定した. $f(\theta)$ はパスの出し手の位置によって, $f(0) = 1$ から $f(\pi) = -1$ の値を取る. パスのリスクを表す $g(L)$ は距離 L のべき関数とし, 指数 α をパラメータとして持つ. たとえば, パスのリスクがパスにかかる時間 T にのみ依存するとすれば $g(L) = T$ となる. このとき時間が L に比例すると考えると $\alpha = 1$ となる. またパスのリスクは, パスに必要なパワー P にも同時に比例すると考えると $g(L) = TP$ となる. このとき, P も L に比例すると考えると $\alpha = 2$ となる. さらに, パスのリスクは, パスに要求される精度にも同時に比例すると考えられる. 要求される精度が L に比例して増加するとすると, $\alpha = 3$ となる. このように様々な要因によって α は決まると考えられる. 本研究ではいくつかの α の値を考える.

3　解析結果

攻撃側にとっての最適配置を考えるために, サイド攻撃のコスト H を最小にする θ の値を求めたい. 図 2 より, $L = \sqrt{2(1-\cos\theta)}$ であるから, コスト関数は以下のように書き換えられる.

$$H = (1 - K)\cos\theta + K(\sqrt{2(1-\cos\theta)})^{\alpha} \tag{2}$$

α の値が 1 から 3 の値をとるとき, パスのリスクの重み K の値によって, コスト関数がどのように変化するかをみた.

3.1　$\alpha = 1$ の場合

パラメーター値を $\alpha = 1$, $0 \le \theta \le \pi$ とした. つまり, パスのリスクがパスにかかる時間 T にのみ依存する場合である.

まず, $K = 0.1$, $K = 0.9$ の場合のコスト関数を図 3 に示す. $K = 0.1$ では $\theta = \pi$ のときコストが最小になり, $K = 0.9$ では $\theta = 0$ のときコストが最小になる. また, H の極小を手計算によって求める.

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \sin\theta \left((K - 1) + \frac{K}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} \right) \tag{3}$$

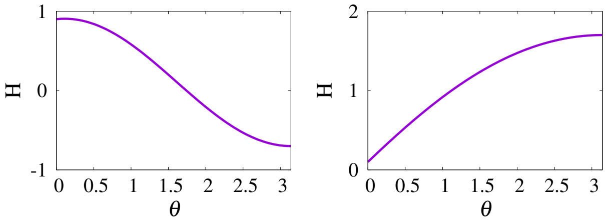

図 3: $\alpha = 1$ の場合のコスト関数．（左図）$K = 0.1$．（右図） $K = 0.9$．

左辺を 0 として計算すると，$\theta = 0$（$\frac{1}{2} \leq K \leq 1$），$\theta = \pi$（$0 \leq K < \frac{1}{2}$）で極小となることがわかった．

3.2　$\alpha = 2$ の場合

次に，パラメーター値を $\alpha = 2, 0 \leq \theta \leq \pi$ とした．つまり，パスのリスクがパスにかかる時間 T とパスに必要なパワー P に依存する場合である．

$\alpha = 1$ の場合と同様に，$K = 0.1$ では $\theta = \pi$ のときコストが最小になり，$K = 0.9$ では $\theta = 0$ のときコストが最小になった．

H の極小を手計算によって求める．

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \sin\theta(3K - 1) \tag{4}$$

左辺を 0 として計算すると，$\theta = 0$（$\frac{1}{3} \leq K \leq 1$），$\theta = \pi$（$0 \leq K < \frac{1}{3}$）で極小となることがわかった．

3.3　$\alpha = 3$ の場合

次に，パラメーター値を $\alpha = 3, 0 \leq \theta \leq \pi$ とした．つまり，パスのリスクがパスにかかる時間 T，パスに必要なパワー P，パスに要求される精度に依存する場合である．

$\alpha = 1, \alpha = 2$ の場合と同様に，$K = 0.1$ では $\theta = \pi$ のときコストが最小になり，$K = 0.9$ では $\theta = 0$ のときコストが最小になった．

$K = 0.3$ の場合のコスト関数を図 4 に示す． グラフ

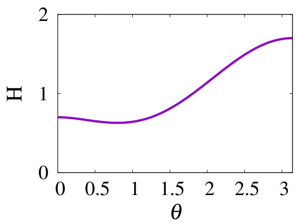

図 4: $\alpha = 3$ の場合のコスト関数（$K = 0.3$）．

から，θ の値が 0.5 から 1.0 の間でコストが最小になっている．よって，$\alpha = 3$ の場合，コストを最小にする θ の値の変化は連続的であることがわかった．

4　考察

α が 1 から 3 の場合を考察すると，K の値が小さいときは「攻撃側が上手」ということになる．つまり，ボールを持ったプレーヤーの位置に関わらずパスを通すことができ，攻撃者の距離が最も大きい位置が最適になると考えられる．反対に，K の値が大きいときは「攻撃側が下手」ということになる．つまり，攻撃側の距離が大きいとパスを通すことができず，攻撃者の距離が最も小さい位置が最適になると考えられる（図 5 参照）．

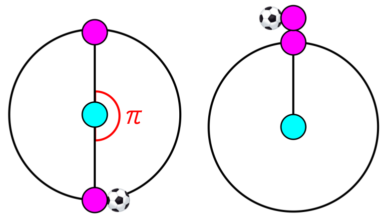

図 5: K の値によって変わる最適配置．（左図）K の値が小さい場合．(右図） K の値が大きい場合．

攻撃側の最適な配置がどのように変化するかを数値計算し，α の値の違いで比較した．α が 1 から 3 の値をとるとき，様々な K の値に対する θ の変化をプロットした（図 6 参照）．

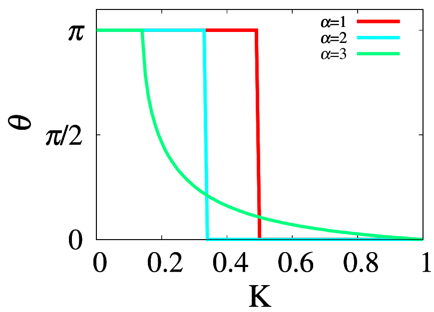

図 6: α の値ごとの最適配置の比較．

α が 1 のときは，安定する配置が $K = \frac{1}{2}$ でジャンプが起こる．また，α が 2 のときは $K = \frac{1}{3}$ でジャンプが起こる．α が 3 のときは θ の値が連続的に変化する．したがって，$2 < \alpha < 3$ でジャンプが生じなくなり，連続的に最適配置が変わっていくことがわかった．

5　まとめと今後の課題

攻撃側の能力が高い場合は，オフェンダーとボールを持ったプレーヤーの距離が最も離れた位置を最適配置とするということがわかった．また，攻撃側の能力が低い場合は，オフェンダーとボールを持ったプレーヤーの距離が最も近い位置を最適配置とするということがわかった．また，α が 2 までは最適な θ がジャンプしていたが，α を 3 にするとジャンプが起こらなくなり，最適な配置が連続的に変化するということがわかった．よって，パスにかかる時間，パスに必要な力，パスの精度を考慮すると最適な配置が連続的に変化すると考えられる．

本研究では攻撃側の能力を考慮したコスト関数を用いて最適配置を考えたが，オフェンダーとボールを持ったプレーヤーの能力の差を考慮したコスト関数であれば，より複雑化できるのではないかと考えた．今後は，攻撃側とディフェンダーがお互いに最適な配置を求めた結果がどうなるかについて調べたいと思う．

参考文献

[1] 若林信夫．最適施設配置問題再論ー表計算ソフトによる解ー．商学討究 (小樽商科大学) 第 47 巻第 4 号, 1997.