振動子集団の同期を抑制するフィードバックのデザイン

小澤 歩　(指導教員：郡 宏)

1　はじめに

単体では異なる周期でリズムを刻む振動子同士が，何らかの作用によりリズムを揃えて振動する現象を同期現象という．同期現象は時に問題を引き起こすことから，その抑制に関する理論には応用的な価値が期待される．例えば，パーキンソン病は脳の神経細胞の異常な同期と関連していると言われている．その治療法の一つである脳深部刺激療法は，脳の特定の領域に電気的な刺激を与えるものであり，外的な刺激が問題部位の同期を抑制することで症状が緩和されると考えられている．しかし，同期抑制の詳細なメカニズムは分かっておらず，どのような刺激を用いるのが適切であるかは明らかでない [1]．そこで，本研究では，集団同期転移を効率的に抑制するフィードバックのデザイン方法を提案するために，位相振動子を用いて記述された振動子集団のモデルを解析する．

2　坂口-蔵本モデル

本研究では，振動子集団のサイズが大きく，かつ各振動子が他の多数の振動子と相互作用する場合を想定する．このような集団が相互作用によって自己組織的に同期しうることを説明する基本的なモデルとして，坂口-蔵本モデルが知られている．N 個の振動子からなる坂口-蔵本モデルは

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\phi_j - \phi_i + \beta) \qquad (1)$$

で与えられる．ここで， ϕ_i と ω_i $(i = 1, 2, ..., N)$ はそれぞれ振動子 i の位相と固有振動数を表す．ω_i の分布は，解析を簡単にするためにローレンツ分布

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 - \gamma^2}$$

を仮定することが多く，本研究でもこの分布を仮定する．ここで γ は分布の広がり具合を表すパラメータである．結合強度 K は相互作用の大きさを表す非負のパラメータである．β は振動子間の相互作用を特徴付けるパラメータであり，$-\pi/2 < \beta < \pi/2$ を満たす．

坂口-蔵本モデルでは，結合強度 K がある臨界値 K_c を越えると集団の一部が同期し始める．同期転移などと呼ばれるこの集団的な振る舞いの変化は，オーダーパラメータの値の変化により検出される．複素オーダーパラメータ r 及び蔵本オーダーパラメータ R を

$$r = \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{j=1}^{N} e^{\mathrm{i}\phi_j}, \quad R = |r|.$$

と定義すると，R は同期の程度を表し，全ての振動子が同じ位相のとき $R = 1$，位相が一様に分布すると $R = 0$ となる．振動子数が無限の極限においては，R は $t \to \infty$ で以下の値をとることが知られている [2]．

$$\begin{cases} R = 0 & (K \le K_c) \\ 0 < R \le 1 & (K > K_c) \end{cases}$$

3　本研究のモデルと解析

本研究では，集団全体が共通の外力 $f(t)$ にさらされた坂口-蔵本モデル

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\phi_j - \phi_i + \beta) + \varepsilon f(t)\sin\phi_i \quad (2)$$

において，とくに $f(t) = f(r(t))$ としたフィードバックを考えることにより，同期の抑制を目指す．ここで ε はフィードバックの強度を表す係数である．なお，$f(t)$ が共通ノイズの場合には同期が促進されることが Nagai と Kori により示されている [3]．

Nagai らと同様の手法を用いると，式 (2) から以下の式が導出される．

$$\dot{r} = \left(-\gamma + \frac{Ke^{\mathrm{i}\beta}}{2} + i\omega_0\right)r - \frac{Ke^{-\mathrm{i}\beta}}{2}|r|^2 r - \frac{\varepsilon\left(1-r^2\right)f}{2}. \qquad (3)$$

ここで，フィードバック $f(r)$ として

$$f(r) = a\,\mathrm{Re}\,(r) + b\,\mathrm{Im}\,(r)$$

を考える．ただし，$a^2+b^2 = 1$ とする．そして $r = x+\mathrm{i}y$ とおいて非同期状態 $(x = y = 0)$ の周りで式 (3) を線形安定性解析し，$r = 0$ を最も安定にする (a, b) の組を求める．

3.1　$\beta = 0$ の場合

安定性行列 L は以下のようになる．

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_0 - \frac{a\varepsilon}{2} & -\omega_0 - \frac{b\varepsilon}{2} \\ \omega_0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

ただし，$\lambda_0 = -\gamma + \frac{K}{2}$ とおいた．L の固有値は以下で与えられる．

$$\lambda_\pm = \frac{2\lambda_0 - \frac{a\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - (2\omega_0 + \frac{b\varepsilon}{2})^2}}{2}.$$

さて $r = 0$ が安定になるのは，$\mathrm{Re}\,(\lambda_+) < 0$ の時である．$\mathrm{Re}\,(\lambda_+) = 0$ の解を K_c とおくと

$$K_c = 2\gamma + \frac{a\varepsilon}{2} - \mathrm{Re}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - (2\omega_0 + \frac{b\varepsilon}{2})^2}\right)$$

であり，$r = 0$ の安定性は以下のようになる．

$$\begin{cases} r = 0 \text{ は安定} & (K < K_c) \\ r = 0 \text{ は不安定} & (K > K_c) \end{cases}$$

同期転移を抑制するには K_c を最大化すれば良いが，これは $\mathrm{Re}\,(\lambda_+)$ を最小化することと同値である．そのようなパラメータは $\varepsilon \le 4\omega_0$ の時 $(a, b) = (1, 0)$ である．この時，臨界結合強度は $\varepsilon/2$ 増加する．最適なフィードバックを異なる強度 ε で与えた時の蔵本オーダーパラメータのグラフを図 1 に示す．

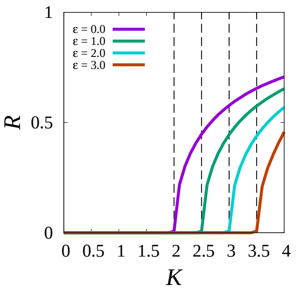

図 1: 蔵本モデル ($\beta = 0$ のときの坂口-蔵本モデル) で表される振動子集団に異なる強さ ε のフィードバックを与えた時のオーダーパラメータの分岐図．横軸は結合強度, 縦軸は蔵本オーダーパラメータ．破線は臨界結合強度 K_c の理論値を示す．

3.2 $\beta \neq 0$ の場合

$\beta = 0$ の場合と同様に安定性行列の固有値を計算すると，以下のようになる．

$$\lambda_{\pm} = -\gamma + \frac{K}{2}\cos\beta - \frac{a\varepsilon}{4} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - (4\omega_0 + 2K\sin\beta + b\varepsilon)^2}}{4}$$

$\beta \neq 0$ の場合，最適な (a, b) の選び方は結合強度 K にも依存する．特に，

$$\zeta(K) \equiv 2K\sin\beta + 4\omega_0$$

とおくと，ζ の値により場合分けされる．例えば，$\zeta > 0$ かつ $\varepsilon \leq 4\omega_0$ の時は，$(a, b) = (1, 0)$ が最適である．

ここでフィードバックを与えない場合，すなわち $\varepsilon = 0$ の場合の安定性行列の固有値を $\lambda^0_{\pm}$ とおく．すると，最適な (a, b) を用いてフィードバックを与える場合，

$$\mathrm{Re}(\lambda_+) \leq \mathrm{Re}\left(\lambda^0_+\right) \quad (\text{等号成立条件は} \zeta(K) = 0)$$

が成り立つ．そのため，$\varepsilon = 0$ の時の臨界結合強度 K^0_c が $\zeta\left(K^0_c\right) = 0$ を満たす場合 (これは $\tan\beta = -\omega_0/\gamma$ の場合である) を除けば，最適なフィードバックを与えることにより臨界結合強度は大きくなる．フィードバックを与えた場合の臨界結合強度 K_c の具体的な値は，$\varepsilon \leq 4\omega_0$ のとき，以下のようになる．

(i) $\tan\beta > 0$ の場合
ε によらず $K_c = K^0_c + \frac{\varepsilon}{2\cos\beta}$ である．

(ii) $-\frac{\omega_0}{\gamma} < \tan\beta < 0$ の場合
$\varepsilon^+_0 = \frac{4(\gamma\tan\beta + \omega_0)}{1 - \tan\beta}$，$p^+ = 4\gamma\cos\beta + \sin\beta(\varepsilon - 4\omega_0)$，$q^+ = 2\left(\gamma^2 + \omega_0^2\right) - \omega_0\varepsilon$ とおくと，

$$K_c = \begin{cases} K^0_c + \frac{\varepsilon}{2\cos\beta} & (\varepsilon \leq \varepsilon^+_0) \\ \frac{p^+ + \sqrt{p^{+2} - 8q^+}}{2} & (\varepsilon > \varepsilon^+_0) \end{cases}$$

(iii) $\tan\beta < -\frac{\omega_0}{\gamma}$ の場合
$\beta \leq -\pi/4$ ならば ε によらず $K_c = K^0_c + \frac{\varepsilon}{2\cos\beta}$ である．$\beta > -\pi/4$ ならば

$$K_c = \begin{cases} K^0_c + \frac{\varepsilon}{2\cos\beta} & (\varepsilon \leq \varepsilon^-_0) \\ \frac{p^- + \sqrt{p^{-2} - 8q^-}}{2} & (\varepsilon > \varepsilon^-_0) \end{cases}$$

である．ただし，$\varepsilon^-_0 = -\frac{4(\gamma\tan\beta + \omega_0)}{1 + \tan\beta}$，$p^- = 4\gamma\cos\beta - \sin\beta(\varepsilon + 4\omega_0)$，$q^- = 2\left(\gamma^2 + \omega_0^2\right) + \omega_0\varepsilon$ とおいた．

(i)-(iii) の各場合について，異なる強度 ε でフィードバックを与えたときの，蔵本オーダーパラメータのグラフを図 2 に示す．

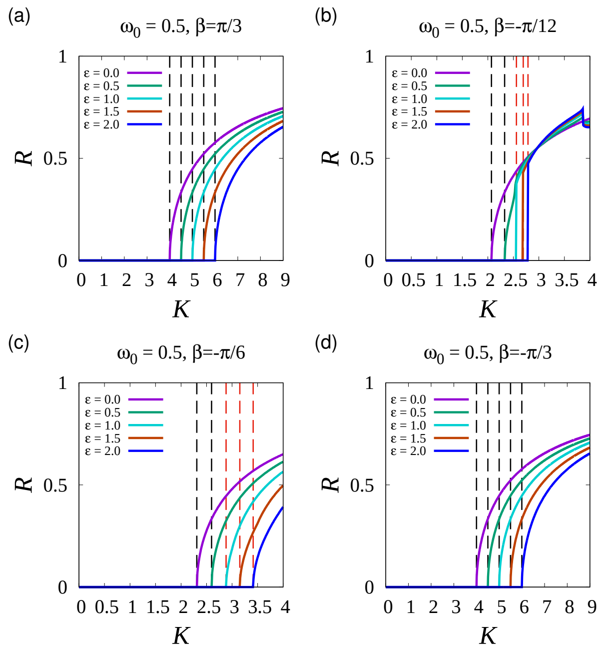

図 2: 坂口-蔵本モデルで表される振動子集団に異なる強さ ε のフィードバックを与えた時のオーダーパラメータの分岐図．破線は臨界結合強度の理論値を示す．横軸は結合強度, 縦軸は蔵本オーダーパラメータ．(a)(i) の場合．(b)(ii) の場合．$\varepsilon = 0, 0.5$ が $\varepsilon \leq \varepsilon^+_0$ の場合に対応する．(c)(iii) で $\beta > -\pi/4$ を満たす場合．$\varepsilon = 0, 0.5$ が $\varepsilon \leq \varepsilon^-_0$ の場合に対応する．(d)(iii) で $\beta \leq -\pi/4$ の場合．

4 まとめと今後の課題

坂口-蔵本モデルに複素オーダーパラメータの関数としてフィードバックを与えた系を解析し，同期を最も抑制するパラメータの組を求めた．特殊な例を除けば，最適なパラメータを用いることにより臨界結合強度が増加することを理論的に示し，その増分を算出した．今後はより一般的な振動子集団についても検討したい．

参考文献

[1] O. V. Popovych, C. Hauptmann, and P. A. Tass. Effective desynchronization by nonlinear delayed feedback. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 94, p. 164192, 2005.

[2] 蔵本由紀, 河村洋史. 同期現象の数理. 培風館, 2010.

[3] K.H. Nagai and H. Kori. Noise-induced synchronization of a large population of globally coupled nonidentical oscillators. *PRE*, Vol. 81, p. 065202, 2010.