鳩が飛翔する際の最適な位置関係の理論研究

千葉友紀子　　(指導教員：郡宏)

1　はじめに

グループで一緒に行動する動物は，個体間の局所的な相互作用によって様々な興味深い集団運動を起こす．先行研究 [1] では，群れを構成する鳩において，2 羽の速度の相関関係に着目することによって，鳩集団にリーダーとフォロワといった序列の階層構造があることを明らかにした．また，鳩集団において各鳩の平均的な位置は，鳩の序列構造と強く相関していることも明らかになった．この結果は，鳩はリーダフォロワ関係がある構造で飛翔する方が、序列構造のない集団よりも安定した飛翔ができる, ということを示している。

鳩の群れの階層構造はどのような原理に基づいて形成されているのだろうか？私は，この階層構造は，目的の方向に正確に飛翔するための最適構造と関係していると考えた．そこで本研究では，この仮説に基づいたとき，鳩の能力関係によってどのような最適な位置関係が得られるかを，数理モデルを用いて明らかにすることを試みた．

2　モデル

N 個の個体の集団を考え，個体 i は向き θ_i を持つ．個体間には向きを揃える相互作用が存在し，また，各個体は目的の方向を感知できてその方向にも自分の向きを揃えると仮定する．このような状況を次の θ_i の時間発展方程式で記述する．

$$\dot{\theta}_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\sin(\theta_j - \theta_i) + H_i \sin(\phi - \theta_i) + \xi_i(t) \quad (1)$$

ここで，$A_{ij}\sin(\theta_j - \theta_i)$ は i が j から受ける相互作用を示しており，A_{ij} は j が i に与える影響力の大きさを表す．また ϕ は集団が向かおうとしている目的方向を表し，$H_i \sin(\phi - \theta_i)$ は各個体が目的方向に向こうとする効果を表す．H_i $(0 \leq H_i \leq 1)$ は鳩 i の目的方向の感知能力の高さを表し，値が大きいほど目的の方向に向く力が大きくなる．もっとも能力の高い鳩を $i = 1$ とする．すなわち，$H_1 = 1.0$ に固定する．$\xi_i(t)$ はノイズで，個体の飛翔方向が風などの影響は個体のきまぐれなどで揺らぐ効果を記述する．ここでは，$\xi_i(t)$ として平均 0，分散 q_i の白色ガウスノイズを用いる．すなわち，$\langle\xi_i\rangle = 0, \langle\xi_i\xi_j\rangle = q_i\delta_{ij}$ とする．以後，一般性を失わず $\phi = 0$ に固定する．

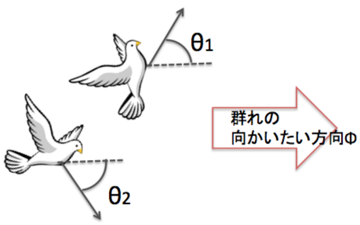

図 1: 2 羽の場合のモデルの概略

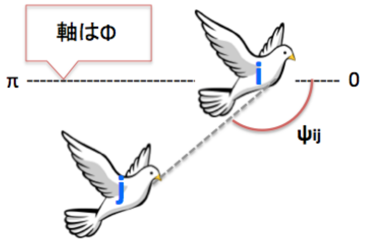

図 2: 鳩の位置関係

このモデルでは相互作用強度 A_{ij} は個体の位置関係から決まるとし，次の様に設定する．図 2 のように個体 j が個体 i から角度 ψ_{ij} の位置にいるとする．ここで ψ_{ij} は，個体 i と j をつなぐ直線が目的方向となす角度である．このとき A_{ij} と A_{ji} を

$$\begin{cases} A_{ij} = \cos\frac{\psi_{ij}}{2} \\ A_{ji} = \cos\frac{\pi - \psi_{ij}}{2} = \sin\frac{\psi}{2} \end{cases} \quad (2)$$

と設定する．これによって，個体 i が個体 j から受ける影響の大きさ A_{ij} は個体 j が前方 $(\psi_{ij} = 0)$ にいるときに最大値 $A_{ij} = 1$ を，後方 $(\psi_{ij} = 1)$ にいるとき最小値 $A_{ij} = 0$ を取り，その間の ψ_{ij} に対して A_{ij} は滑らかに単調に変化する．A_{ji} についても同様である．したがって 2 つの個体間の相互作用強度には

$$A_{ij}^2 + A_{ji}^2 = 1 \quad (3)$$

の関係が成立する．

安定な飛翔を考えるために，$\theta_i(t)$ は 0 の周りでゆらぐ．共分散 $\langle\theta_i(t)\theta_j(t)\rangle = \sigma_{ij}(t)$ を導入する．

個体 i の飛翔方向の揺らぎの大きさは σ_{ii} によって特徴づけられる．これが小さければ小さいほど，個体 i の飛翔はより安定であると言える．そこで，揺らぎの総和

$$S = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ii} \quad (4)$$

を最小にする A_{ij} の条件，すなわち，最適な個体の配置を求めたい．共分散行列は，ノイズが十分小さいことを仮定し，式 (1) を $\theta_i = 0$ の周りで線形化すると解析的に求めることができる．式 (1) を線形化すると

$$\dot{\theta}_i = \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij}\theta_j + \xi_i(t) \quad (5)$$

を得る．ここで $\gamma_{ii} = -A_{ii} - H_i$, $\gamma_{ij} = A_{ij}$ $(j \neq i)$ である．文献 [H.Risken The Fokker-Planck Equation Second Edition] にあるとおり，この方程式に対して共分散は σ_{ij} は次の関係式に従う

$$\dot{\sigma}_{ij} = -\sum_{k=1}^{N} \gamma_{ik}\sigma_{kj} - \sum_{k=1}^{N} \gamma_{jk}\sigma_{ki} + q_{ij}. \quad (6)$$

今求めたいのは時間が十分に経った $(t \to \infty)$ のときの共分散である．共分散が $t \to \infty$ で収束するとすると，式 (6) の左辺は 0 とおいた N^2 個の連立方程式を解くことによって共分散を求めることができる．以下 2 つの具体例において最適配置を求める．

3　具体例

3.1　2 羽の場合

$N=2$ の場合を考える．このとき式 (5) は

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= -(A_{12}+1)\theta_1 + A_{12}\theta_2 + \xi_1(t)\\ \dot{\theta}_2 &= A_{21}\theta_1 - (A_{21}+H_2)\theta_2 + \xi_2(t).\end{aligned}$$

となる．

この方程式において共分散をもとめると，$S=\sigma_{11}+\sigma_{22}$ は

$$S = \frac{2+2(a+b)(H_1+H_2)+(H_1+H_2)^2}{2(a+b+H_1+H_2)(aH_2+bH_1+H_1H_2)} \qquad (7)$$

となる．ただし $a=A_{12}, b=A_{21}$ と置いた．式 (2) より，$a=\cos\frac{\psi}{2}, b=\sin\frac{\psi}{2}$ である．

様々な H_2 $(0 \le H_2 \le 1)$ に対して，S を最小にする ψ を数値的に求めた結果が図 3 である．

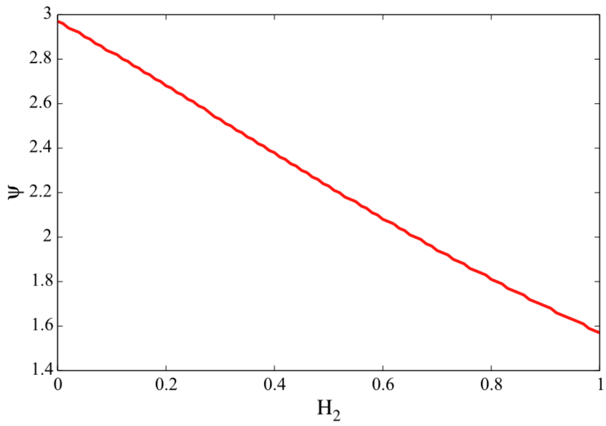

図 3: $N=2$ の場合，ゆらぎ S を最小にする ψ の H_2 依存性

$H_2=0.0$ と $H_2=1.0$ のそれぞれで分散を最小にする ψ の値を Mathematica でも確認した．それぞれ $\psi=2.97223$ と $\psi=1.5708$ になり，図 3 とほぼ一致している．

これより $H_2=0.0$ の時は $i=2$ の鳩は $i=1$ の真後ろに近い斜め後ろにいて，H_2 の値が大きくなるにつれ段々と鳩 1 がより鳩 2 が見える位置で飛翔し，$H_2=1.0$ の時は 2 羽は進行方向に対して真横に並んで飛翔すると安定する．

3.2　3 羽の場合

$N=2$ の場合を考える．このとき式 (5) は

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= -(A_{12}+A_{13}+1)\theta_1 + A_{12}\theta_2 + A_{13}\theta_3 + \xi_1(t)\\ \dot{\theta}_2 &= A_{21}\theta_1 - (A_{21}+A_{23}+H_2)\theta_2 + A_{23}\theta_3 + \xi_2(t)\\ \dot{\theta}_3 &= A_{31}\theta_1 + A_{32}\theta_2 - (A_{31}+A_{32}+H_3)\theta_3 + \xi_3(t)\end{aligned}$$

となる．

簡単に考えるために制約条件をつける．$i=1$ の鳩を頂点に 3 羽は二等辺三角形の位置関係にあり，さらに $i=2,3$ の 2 羽の鳩の能力 H_i は等しいとする．式 (2) より，この条件下で A_{ij} は以下のようにかける．

$$\begin{cases} A_{12}=A_{13}=\cos\frac{\psi}{2}, A_{21}=A_{31}=\sin\frac{\psi}{2} \\ A_{23}=A_{32}=\frac{1}{sqrt2} \end{cases}$$

これらの条件のもとで，方程式において共分散 $(S=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})$ をもとめ、$N=2$ の場合と同様に，様々な H_2 $(0 \le H_2 \le 1)$ に対して，S を最小にする ψ を数値的に求めた結果が図 4 である．

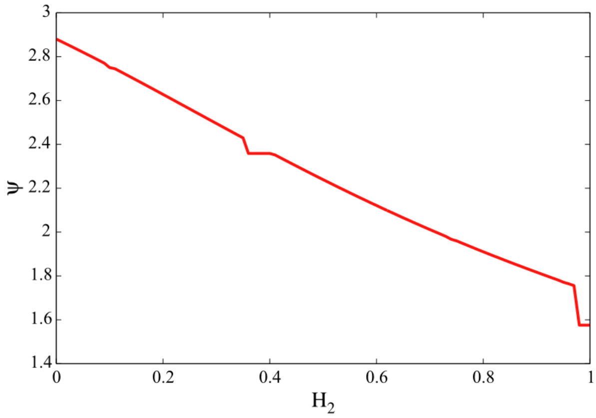

図 4: $N=3$:ある H_2 に対して分散を最小にする ψ

$H_2=0.0$ と $H_2=1.0$ のそれぞれで分散を最小にする ψ の値を Mathematica でも確認した．それぞれ $\psi=2.88021$ と $\psi=1.5708$ になり，数値計算で得た値はそれぞれ $\psi=2.880117$ と $\psi=1.575796$ でほぼ一致している．

これより，2 羽の時と同様に $H_2(=H_3)=1.0$ の時以外は常に二等辺三角形の形を保ち，$H_2(H_3)$ の値が大きくなるほ 2 羽の鳩は鳩 1 がより見える位置にで飛翔し，3 羽の能力が等しい時は進行方向に対して横一列に並んで飛翔すると安定する．

4　まとめと今後の課題

鳩が飛翔をするための最適な位置関係ついて調べた．最も能力の高い鳩が、他の鳩より前方で飛翔すると安定する．また後ろの鳩の感知能力が高ければ高いほど，前方の鳩が後ろの鳩の位置をより見やすい位置である方が最適である．さらに全ての鳩の能力が等しい場合は横一列で飛翔すると良い．しかしある鳩の能力が 0 でも，能力の高い鳩の真後ろよりも，少し斜めにある位置関係の方が安定する．

今後の課題として，3 羽の鳩の場合で，様々な条件や位置関係での飛翔について調べる．また個体数をさらに増やし，モデルや相互作用の定義をどのように改良すべきか考察する．

参考文献

[1] Máté Nagy, Zsuzsa Ákos, Dora Biro, and Tamás Vicsek. Hierarchical group dynamics in pigeon flocks. *Nature*, Vol. 464, pp. 890 EP –, 04 2010.