相互作用によるリズムの正確性の向上に関する数理的研究

石川夏衣　(指導教員：郡宏)

1　モチベーション

音はシンクロすることによって音波が増幅され，大きく滑らかになるため，複数で奏でる音楽においてリズムやタイミングがそろっていることは，美しく響きのある演奏に必要不可欠である．

例えば，オーケストラでは各演奏者が指揮者やコンサートマスター，周りの奏者と息を合わせることで全体でシンクロしたリズムを作り出している。リズムを持つユニット集団の相互作用系では，各ユニットのリズムは単体で振動するときに比べ より正確になることが理論的に示されている [1].

本研究では，先行研究 [1] では着目していなかったリズムの波形の自己相関関数から，リズムの正確性を特徴づけることを試みる．また将来的には，オーケストラを意識した相互作用に変更し，オーケストラの奏でる音楽の美しさを数理的に解き明かしたい．

2　モデル，シミュレーション

相互作用がない場合の各ユニットのリズムは，以下の時間発展方程式に従うとする．

$$\dot{\phi}_i(t) \quad = \quad \omega + \mu\xi_i(t). \tag{1}$$

相互作用がない場合とは，それぞれが互いのずれに関係なく動く状態を指す．ω はそのユニットが目指す振動数，$\xi(t)$ は平均 0 , 分散 1 のガウスノイズ，μ はノイズ強度を表している．各ユニットの出力を $\sin\phi(t)$ とする (図 1(左))．はじめはそろっているが，次第にずれていっている様子が観察できる．オーケストラにおいては，それぞれが互いに影響を受けていると考えられるので相互作用を加える．

相互作用がある場合の各ユニットのリズムは，以下の時間発展方程式に従うとする．

$$\dot{\phi}_1 \quad = \quad \omega + K\sin(\phi_2 - \phi_1) + \mu\xi_1(t). \tag{2}$$
$$\dot{\phi}_2 \quad = \quad \omega + K\sin(\phi_1 - \phi_2) + \mu\xi_2(t). \tag{3}$$

相互作用がある場合とは，相手と自分とのずれを減らすようにタイミングを調節しつつ動いている状態を指す．各ユニットの出力を $\sin\phi(t)$ としている. ユニット数を 2 とし，K は相互作用の強さを表しているため，K の値の大きさは，相手に合わせようとする意志の強さを表している (図 1(右)).

相互作用を加えると，相互作用がない場合と比較してユニット間のずれが減り周期も一定で正確になっているように見える．相互作用がある場合にもある程度ばらついてはいるが $t=6$ 付近のばらつき具合で落ち着いている．さらに詳しく観察するため，パワースペクトルを用いて比較する．パワースペクトルとは波形の各振動数成分の強度を表したもので，フーリエ変換の絶対値を用いる．どの振動数の波がどれだけ含まれているかを表したものである (図 2(左))．振動数 2π の周辺についても細かく観察するために縦軸を対数表示にした (図 2(右)).

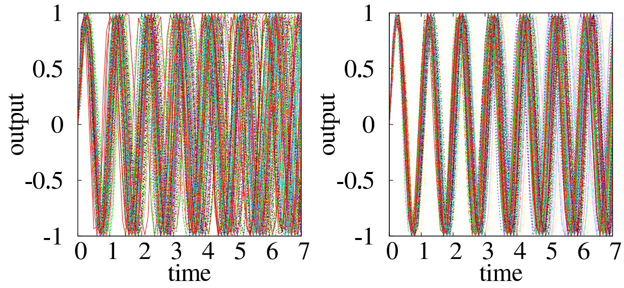

図 1: ユニット出力の時系列．(左図) 相互作用なし,(右図) 相互作用あり　$K=0.8$，$\mu=0.5$，$N=100$

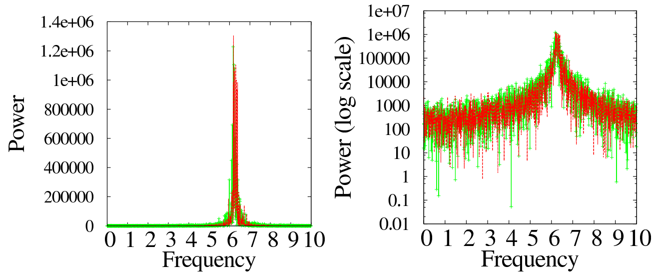

図 2: パワースペクトル．相互作用なし (緑)，相互作用あり (赤)．(右図) 縦軸を対数表示にしたもの．$K=0.8$, $\mu=0.5$.

リズムが不正確であるほどパワースペクトルの分布は広がる．そのため相互作用ありのユニット集団の方が相互作用なしのユニット集団に比べてばらつきが少ないはずであるが，図 2 の 2 つのグラフではよく判定できないため，自己相関関数を導入する [2].

$$C(t) \quad \equiv \quad \frac{1}{T}\int_0^T y(t+s)y(s)ds. \tag{4}$$

ここで T は観測時間である。自己相関関数は，ある関数 $y(t)$ と，その関数の時間を t だけシフトさせた $y(t+s)$ が，どの程度似ているかを測る尺度である．グラフ同士の類似度が高ければ $C(t)$ の値は大きくなり，完全に一致するときに最大値をとる．本研究で用いている $\sin(\phi)$ は振動しているため $C(t)$ の値も振動し，$t=0,1,2...$ ごとに極大値をとる．ノイズのない正確なリズムであれば減衰せずに振動を続けるが，ノイズがある場合は振動しつつ時間とともに減衰していく (図 3(左))．この減衰の程度を見やすくするために極大値を取り出してグラフにしたものを，極大値プロットと呼ぶことにする (図 3(右)).

相互作用がある場合と相互作用がない場合で減衰の程度が異なっている．このグラフは時間経過による類似度の移り変わりを示しているため，より減衰が少ない相互作用あり (赤) の方がリズムが正確であると言える．また，極大値プロットの相互作用なし (緑) のグラフは，縦軸を $\log C(t)$ とすると直線になるため指数関数に近似可能である (図 3(右)).

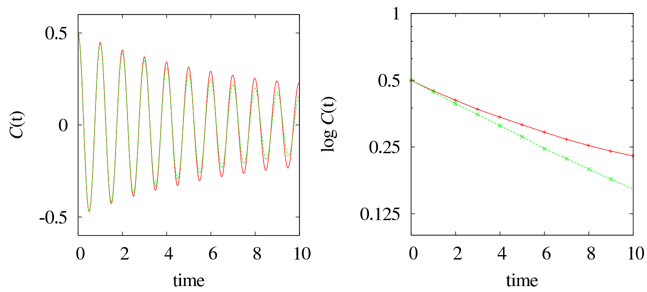

図 3: (左図) 自己相関関数．相互作用なし (緑)，相互作用あり (赤)　(右図) 極大値プロット (縦軸を $\log C(t)$ とした)　$K = 0.8$，$\mu = 0.5$

どちらのグラフにおいても相互作用あり (赤) の方が値の減衰が少ないことは観察できるが，その程度を定量的に観察することができないため，減衰の程度を特徴づける量として次の λ を計測する．

$$\lambda = -\frac{1}{t_1} \log \frac{B}{A}. \quad (5)$$

ここで $A = C(0)$，$B = C(t_1)$ である．λ が小さいほど自己相関関数の減衰が少なく，リズムが正確であると言える．この λ を用いて相互作用を強くしていったときのリズムの正確性の変化についても観察する (図 4)．

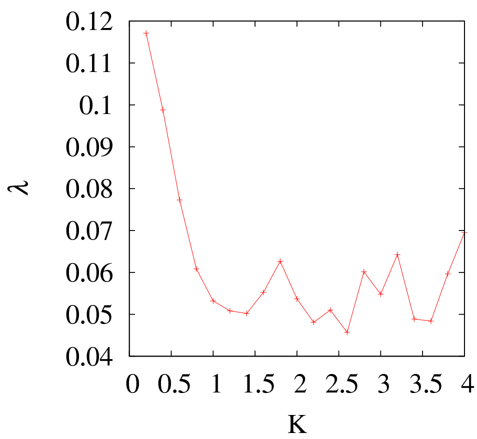

図 4: 不正確性 λ の相互作用強度 K 依存性．$\mu = 0.5$.

K の値が大きくなるにつれて λ の値が小さくなっているため，相互作用が強くなる程リズムの正確性は向上すると考えられる．

次に，相互作用系でのユニット数とリズムの正確性の関係について観察するために，ユニット数を N として以下のモデルを考える．

$$\dot{\phi}_i = \omega + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^{N} \sin(\phi_j - \phi_i) + \mu \xi_i(t). \quad (6)$$

このモデルが表しているのは，各ユニットがすべてのユニットの動きを参考にし，ずれを減らすようにタイミングを早くしたり遅くしたりしながら動いている状態である．このモデルに基づいて，N の値と λ の値との関係を観察する (図 5)．

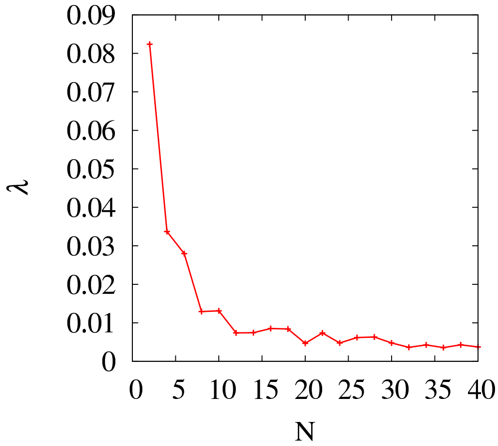

図 5: 不正確性 λ のユニット数 N 依存性　$K = 0.8$，$\mu = 0.5$

ユニット数 N の値が大きくなるにつれて λ の値も小さくなっているため，相互作用系ではユニット数が多ければ多いほどリズムの正確性が向上すると考えられる．

3　まとめと今後の課題

フーリエ変換によるパワースペクトルの値のばらつきや自己相関関数のグラフの減衰の程度を表す変数 λ を用いることで，リズムの正確性を定量的に観察できた．また，相互作用が強くユニット数が大きい程 λ の値は小さくなり，‘シンクロ‘するだけでなくリズムの正確性が向上することが分かった．しかし相互作用の強さ K と λ のグラフでは，K がある程度大きくなると λ の減少が止まり値が振動しているようにも見える．この振動が意味のあるものであるのかが不明であるため，自己相関関数の観察時間を長くしたり K の刻み幅をさらに細かくしたりして振動が消える，もしくは振動の幅が小さくなるか否かを観察する必要がある．

本研究ではすべてのユニットが平等に影響し合っていて，ノイズも同一のものを使っているが，実際にはほかの個体に比べて影響力の強い個体や，周りからの影響を受けにくい個体，そもそもリズムの正確性が高い個体などが存在しているはずである．また，個体同士が近くにいるのか遠くにいるのか，前にいるのか後ろにいるのかによって受ける影響の大きさに差がでてくると考えられる．

今後は走りやすい個体やもたれやすい個体などの個人差を表すためにノイズの値の範囲を指定して具体性を持たせたり，個体同士の位置関係によって受ける相互作用の大きさに差をつけたりすることによって，全体のリズムの正確性が最も向上する配置の算出を目指したい．

参考文献

[1] Hiroshi Kori, Yoji Kawamura, and Naoki Masuda. Structure of cell networks critically determines oscillation regularity. *Journal of theoretical biology*, Vol. 297, pp. 61–72, 2012.

[2] 篠本滋．情報処理 予測とシミュレーション．岩波書店, 2002.