ピアノ弦ダイナミクスの数理モデル〜調律の特殊な効果について〜

鳥山早紀　(指導教員：郡宏)

1　はじめに

楽器は，楽器本体を何らかの力によって振動させることで音を出している．例えば打楽器は特にわかりやすく，太鼓なら張られている皮を叩くことで，皮を振動させて音を出している．皮の振動を手で押さえるなどすれば音は止まる．この原理は管楽器，弦楽器，鍵盤楽器にも共通している．管楽器なら息を吹き込むことで，弦楽器なら弦をこすることで，鍵盤楽器なら鍵盤を叩くことで音を鳴らしている．

では，ピアノはどのような振動をして音が鳴っているのだろうか？ ピアノには 1 つの鍵盤に対して 3 本の弦が張られている．3 本の弦の基本振動は中央の弦に対して一方は少し低めに，他方は少し高めに調律された共振周波数を持っている [1]．3 本とも同じ周波数に調律してしまうと，音の伸びが短く，すなわち減衰は速くなり，単調な寂しい音色になってしまう．ところが，周波数を 3 本で少しずらすことによって 3 本の弦はそれぞれで別の，複雑な減衰の仕方をする．具体的にはどのような減衰運動をしているのかをシミュレーションを行い明らかにする．それがわかればより生の楽器の音に近い電子音が作れるかもしれない．

2　2 本弦のモデルとシミュレーション

本来ピアノの鍵盤は 3 本弦であるものが一般的だが，簡単のためまず 2 本弦でモデル化する．モデル化は先行研究 [1] を参考にした．

$$m\ddot{x}_1 = -\mu\dot{x}_1 - \eta\dot{x}_2 - k_1x_1 \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -\mu\dot{x}_2 - \eta\dot{x}_1 - k_2x_2 \quad (2)$$

ここで，m は弦の質量，x は振幅，μ はその弦自身の抵抗 (減衰定数)，η は他の弦からの抵抗 (相互作用強度)，k は張力である．

シミュレーションではパラメーター値を $m = 1.0$, $\mu = 0.01$, $\eta = 0.005$ とした．中央の弦の張力 k を 0.4^2 とし，左右の弦はそこから 0.01, 0.03 ほどずらした張力に設定する．x の初期条件は，1.0, -1.0 の場合にのみ限定する．計算スキームは修正オイラー法 (時間ステップ $dt = 0.001$) である．まず，初期条件を $x_1 = 1.0$, $x_2 = 1.0$, $k_1 = 0.4^2$, $k_2 = 0.4^2$, とし，2 本の全く同じ弦を使ってシミュレーションを行う．図 1 の (a) はそのシミュレーション結果であり，(c), (d) はその拡大した図である．2 本の弦はぴったりと重なり，2 本が全く同じ減衰運動をしているのがわかる．

次に，実際のピアノと同じように 2 本の弦の張力を少しずらしてシミュレーションを行ってみる．初期条件は $x_1 = 1.0$, $x_2 = 1.0$, $k_1 = 0.4^2$, $k_2 = 0.41^2$ とし，x は 2 本で同じ値をとる．図 1(b) はそのシミュレーション結果であり，(e), (f) はその拡大した図である．(a) の結果と比べると減衰の仕方は単純ではなく，2 本の弦で違う減衰をしていることがわかる．そこで，x の極大値のみをプロットし，対数をとってみると図 2(a) のような結果となる．今後このような図を極大値プロットと呼ぶことにする．減衰が速くなったり遅くなったり，直線を描かないことからも指数関数的に減少しているわけではないことがわかる．

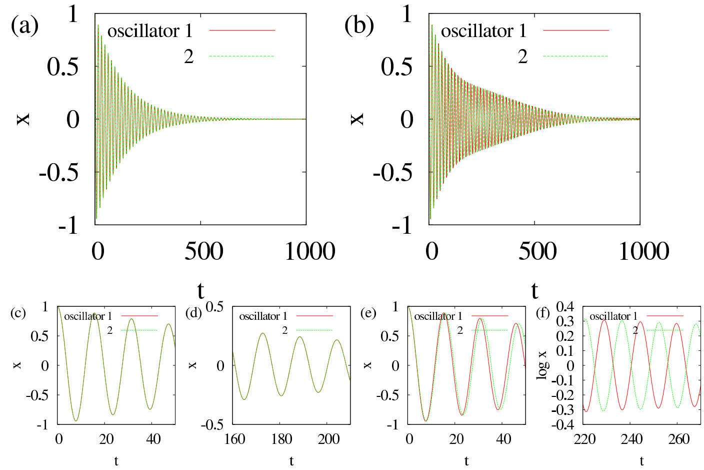

図 1: $k_1 = k_2$ でのシミュレーション結果 (左図) と $k_1 \neq k_2$ でのシミュレーション結果 (右図)

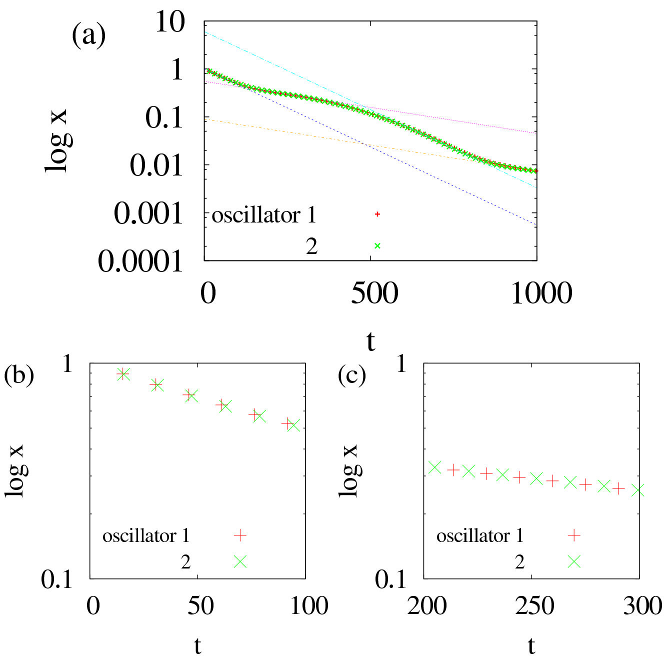

図 2: $k_1 \neq k_2$ のときの x の極大値プロット

図 2(b), (c) は，(a) の一部を拡大したものである．x の極大値プロットに注目すると，2 本の弦のプロットは重なったり、交互にずれたりをくりかえしていることがわかる．2 本の弦のプロットが重なるときに減衰は速くなり，重ならず交互にプロットされているときに減衰は遅くなっていることも見て取れる．2 本の弦の振幅 x のずれ，すなわち位相差はどのように変化しているだろうか．弦 1 の位相を θ_1，弦 2 の位相を θ_2 とする．時間 t による位相差 $\theta_1 - \theta_2$ の変化は図 3 の通りである．

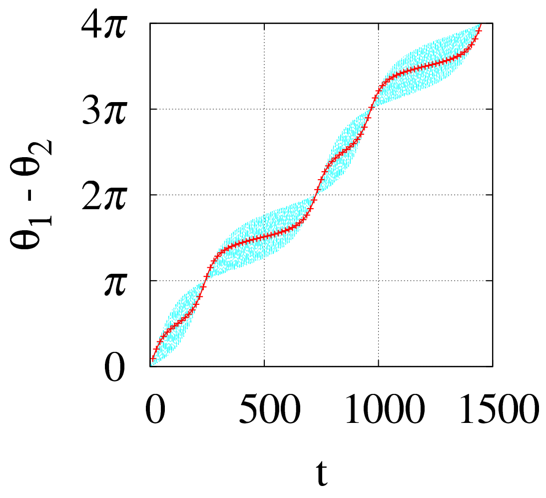

図 3: 時間 t による位相差 $\theta_1 - \theta_2$ の変化 (水色) と θ_2 が $2n\pi$(n:整数) を超えた瞬間の $\theta_1 - \theta_2$(赤色)

図 3 から明らかなように，位相差の変化の仕方には 2 種類存在している．$-\frac{\pi}{2} \le \theta_1 - \theta_2 \le \frac{\pi}{2}$ と，$\frac{\pi}{2} \le \theta_1 - \theta_2 \le \frac{3\pi}{2}$ の範囲で位相差の変化の様子は分けられるように見える．これをそれぞれ同位相パターンと逆位相パターンと呼ぶことにする．図 2(a) の傾きの移り変わりを t に着目して比較してみると，やはり位相差の変化と同じタイミングで傾きも変化しているように見える．すなわち、2 本の弦のプロットが重なるときが同位相パターン, 2 本の弦のプロットは重ならず交互にプロットされているときが逆位相パターンである．

3 理論

そこで，同位相パターン，逆位相パターンそれぞれの減衰率を調べる．まず，同位相パターンを定義する．同位相パターンの初期条件は $x_1 = 1.0$, $x_2 = 1.0$, $k_1 = 0.4^2$, $k_2 = 0.4^2$ であり，全く同じ条件の弦を 2 本使ってのシミュレーションである．そのシミュレーション結果は図 1(a) と同様である．x の極大値プロットは図 4(a) のような結果となり，綺麗な直線を描く．すなわち，2 本の弦はともに指数関数的に減少していることがわかる．

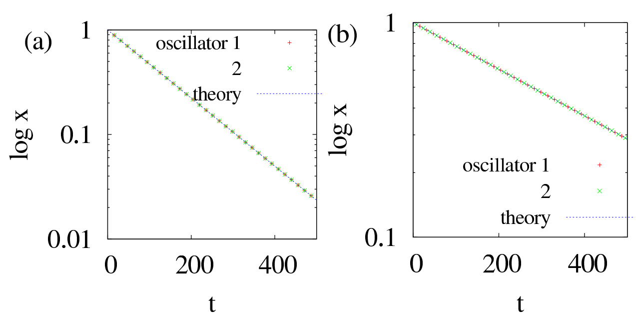

図 4: 同位相パターンの x の極大値プロット (左図) と逆位相パターンの x の極大値プロット (右図)

では，この減衰運動の減衰率はどのくらいだろう．減衰率は以下のように計算できる．式 (1) と (2) の辺々を足し，$y = x_1 + x_2$ とおくと，1 つの 2 階微分方程式に帰着する．さらに $y_1 = y$, $y_2 = \dot{y_1}$ と置くと，次の 2 変数 1 階微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} - \frac{\eta}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

に帰着する．静止状態 $(y_1, y_2) = (0, 0)$ の安定性を調べるため，(3) の右辺の行列を A と置き，$\det(A - \lambda E) = 0$ を λ について解くと $\lambda = -\sigma \pm i\omega$ を得る．ここで，σ は減衰率，ω は振動数で，それぞれ $\sigma = \frac{\mu+\eta}{2m}$, $\omega = \sqrt{-\frac{(\mu+\eta)^2}{m^2} + \frac{4k}{m}}$ である．減衰率 σ に $\mu = 0.01$, $\eta = 0.005$, $m = 1$ を代入すると $\sigma = 0.0075$ と求められる．$e^{-0.0075t}$ を x の極大値プロットに書き記すと，図 4(a) のように綺麗に重なった．

同位相パターンと同様の方法で逆位相パターンも定義する．逆位相パターンの初期条件は $x_1 = 1.0$, $x_2 = -1.0$, $k_1 = 0.4^2$, $k_2 = 0.4^2$ とし，$x_2 = -x_1$ となるように値をとる．この x の極大値プロットが図 4(b) である．やはり指数関数的に減少していることがわかる．同位相パターンの時と比べて減衰が遅いことも図から明らかである．

減衰率についても同様に求めると，$\sigma = \frac{\mu-\eta}{2m}$, $\omega = \sqrt{-\frac{(\mu-\eta)^2}{m^2} + \frac{4k}{m}}$ であり，μ, η, m の中身を代入すると $\sigma = 0.0025$ と求められる．$e^{-0.0025t}$ を x の極大値プロットに書き記すと，図 4(b) のように綺麗に重なり，逆位相パターンでもシミュレーションの結果が位相差に依存する減衰特性によって説明できることが確認できた．

4 考察

以上より，同位相パターンの減衰率は $\sigma = 0.0075$, 逆位相パターンの減衰率は $\sigma = 0.0025$ であることがわかった．ここで，2 章の図 2(a) に再び着目する．4 本の直線は $e^{-0.0025t}$, $e^{-0.0075t}$ の対数である。単純な指数関数的な減衰ではない，複雑な減衰に見えていた極大値プロットだが，4 本の直線とぴったり重なる瞬間があり，この極大値プロットもやはり同位相パターン，逆位相パターンの 2 種類で表され，それぞれの減衰率が交互にやってきているということがわかる．

5 まとめと今後の課題

2 本弦によるシミュレーションをプログラミング、手計算の両方で示すことができた。張力 k をずらしたときの減衰の様子を、位相差によって同位相パターン、逆位相パターンの 2 種類に分け、それぞれの減衰率で示すことができた。

2 本弦でのシミュレーション結果は理論づいて解析することができた。この結果をもとに、3 本弦でもシミュレーションを行い、何に基づいて減衰運動を行っているかを解析したい。また、本研究ではまだ実際にどんな音色なのかを聴けていないので、音の出力も行ってみたい。

参考文献

[1] 中村勲, 長沼大介. 三本弦によるピアノ音の減衰特性の考察. 情報処理学会研究報告.[音楽情報科学], Vol. 2002, No. 14, pp. 7–12, 2002.