

チューリングパターンの対する境界条件の効果と画像フィルタへの応用

斎藤亜美 (指導教員：郡宏)

1 はじめに

数学者のアランチューリングは、適切な条件を満たす化学反応システムが自発的に周期パターン（チューリングパターン）を形成することを 1952 年に示し [1] この予言は 1990 年に実験によって実証された。チューリングは活性化因子と抑制因子と呼ばれる 2 つの化学物質を想定した。2 つの因子の拡散係数が大きく異なる場合には周期パターンが現れるが、差が少ない場合は均一になる。魚やシマウマのような体表のしましまや斑点模様も、活性化因子が色素と関係すれば説明がつく [2]。

本研究では、画像の 픽セルにこのチューリングパターン（反応拡散方程式）をエフェクトとして作用させる手法を提案し、新しい画像フィルタを提案することを目的とした。この過程で、適切な境界条件を取り入れることが必要であることがわかった。そこで、後半では境界条件の効果について研究し、境界条件によるパターン形成の変化について述べる。

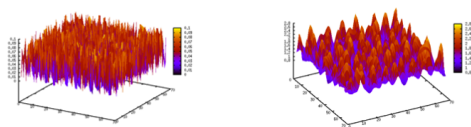


図 1: ランダムな初期条件からのパターン形成。初期条件に関係なく（ここでは各 픽セルに 0 ～ 1 の乱数を与えた）自発的に等間隔パターンが出現する。

2 シミュレーションモデル

以下のチューリング・パターンを生成する簡単なモデルを使用する [2]。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(U, V) - d_u U + D_u \Delta U \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = G(U, V) - d_v V + D_v \Delta V \quad (2)$$

ここで、 $0 \leq F(U, V) = a_u U + b_u V + c_u \leq F_{\max}$, $0 \leq G(U, V) = a_v U + b_v V + c_v \leq G_{\max}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である。左辺を局所における濃度変化、右辺の $F(U, V)$, $G(U, V)$ は反応項, $d_u \Delta U$, $d_v \Delta V$ は拡散項を表す。本研究のシミュレーションでは便宜上、格子間距離を 1 として、 ΔU を離散したもの置き換えた、ここまでは、本研究に共通する設定である。

まず、試験的にシミュレーションを行った。空間を 200×200 の 2 次元格子で、自由境界条件とした。 U と V の初期値として 0 から 1 の一様乱数を与えた。 $t = 90$ まで時間発展させた様子を図 2 に示す（図 2）。

なお、モデルには縞の方向性を決める要素は入っていないので、ランダムなパターンを初期条件にすると一般には方向性のないストライプや斑点模様になる。場に何らかの方向性（境界条件）があると方向性はそれに影響を受ける。また、拡散係数 (D_u と D_v) の値を大きくすると、パターンのスケールが小さくなり、より細かい模様が得られる。

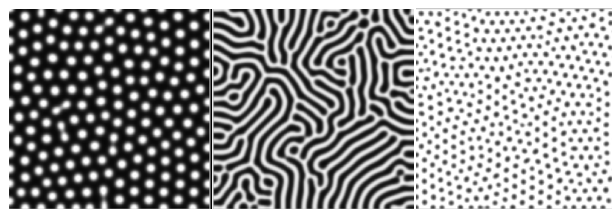


図 2: モデルのシミュレーション結果。活性化因子濃度 $U(x, y)$ をグレースケールで表示した。 $a_u = 0.08, b_u = -0.08, a_v = 0.1, c_v = -0.15, d_u = 0.03, F_{\max} = 0.2, G_{\max} = 0.5$ (左) $c_u = 0.0005, D_u = 0.08, b_v = 0.0, D_v = 1.0$ (中央) $c_u = 0.0, D_u = 0.04, b_v = 0.0, D_v = 0.5$ (右) $c_u = 0.2, D_u = 0.04, b_v = 0.0, D_v = 0.5$

3 チューリングフィルタ

次に、前述のプログラムの初期値を画像の 픽セルにして、画像の変化を観察する。

実験仕様

1. 300×300 のサンプル画像（図 3）を用意し、グレースケールに変換
2. 各 픽セルの数値を 0 から 1 の値に変換し、配列 $U(x, y)$ に格納し初期値とする
3. $V(x, y)$ の初期値はすべて 1.0 に設定
4. $U(x, y), V(x, y)$ を時間発展させ、得られた U の値をグレースケールで表示

実験結果

2 通りの実験を行った。

(A) オリジナルのチューリング方程式のままシミュレーションする（図 4）

(B) 拡散項に勾配の絶対値の逆数 $\frac{1}{1+4|\nabla u|}$ を乗算したモデルを用いてシミュレーションする（図 4）ただし、 $|\nabla u| = \sqrt{(U(x+1, y) - U(x, y))^2 + (U(x, y+1) - U(x, y))^2}$ である。



図 3: サンプル画像

実験 A では、パターンが全体にまで広がり元の画像の原型が認識しにくくなりぼやけた印象である。一方実験 B では、A に比べ輪郭が鮮明になった。拡散項に $\frac{1}{1+4|\nabla u|}$ を乗ずることで、勾配（色素濃度の変位の傾き）が大きい部分は分母が非常に大きくなるため全体



図 4: (左) 実験 A, (右) 実験 B

としては非常に小さい値となる。勾配の大きい部分を拡散させないようにしたため、元の輪郭が残りエッジが強調されたと考えられる。しかし、この場合も十分に時間発展させると絵の輪郭が消えてしまうため、今後も更なる改良が必要である。

4 固定端境界条件

画像フィルタの作成において、エッジ強調の重要性和輪郭抽出する境界条件を詳しく理解する必要があると感じた。これまでのシミュレーションでは、自由境界条件を用いていたが、エッジを残すために、新たに固定端境界条件を設定する。

実験仕様

1. 領域内部の配列 $E = 1$, 領域外部を $E = 0$ とする
2. 配列 $U(x, y), V(x, y)$ が $E = 0$ の場合, $U(x, y) = U_0, V(x, y) = V_0$ と置く。
3. $E = 1$ の配列にのみに式を作用させ、時間発展させる。

ここでは $U_0 = 5, V_0 = 0$ とした。これらの値は、実験 1 の結果における U と V の濃度値の上限と下限の値にそれぞれほぼ対応する。つまり、境界を活性化因子が多く抑制因子が少ない状態に固定した。

実験結果

円、十字、砂時計の 3 つの図形を作成し、領域内部の黒で塗りつぶされた部分を $E = 1$ とし、それ以外を $E = 0$ とした。



図 5: 自由端境界

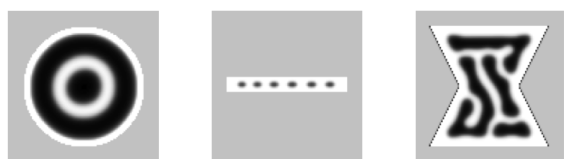


図 6: 固定端境界

自由端境界条件の場合の結果を図 5 に示す。境界部分に注目するとパターンが境界に垂直に衝突しているのが確認できる。これは、自由端では境界と境界の隣

合う領域との差分を 0 にするので、境界部分に隣り合う領域と同じ値をコピーすることと同意である。そのため、パターンが境界に垂直となる。

固定端境界条件の結果を図 6 に示す。こちらは実験 1 に比べより境界の影響を強く受け独特なパターンを形成している。境界の U を高い値に設定したことで、0 ~ 255 のグレースケールに変換した際、255 に非常に近い値となったため、境界部分が白くなったと考えられる。

モノクロ画像への適用

この境界条件を用いて、図 7 のモノクロ画像への適用を試みた。



図 7: サンプル画像



図 8: (左) 図 8 の自由端境界と同様, (右) $U_0 = 0, V_0 = 2.4$ の固定端境界とした。

5 まとめと今後の課題

本研究では、前半にチューリングパターンを用いた画像フィルタを提案し、後半では境界条件がパターンに及ぼす効果について調べた。3 章で作成したフィルタは、十分に時間がたつと画像の原型が分からなくなってしまうという欠点がある。今後の課題は、この欠点について再検討し、より輪郭の強調を意識したフィルタに改良することが挙げられる。また、時間とともに領域が拡大する場合を想定した際のパターンの変化を研究することで、動物の成長とともに変化する模様のシミュレーションに挑戦するのも、非常に興味深い。

謝辞

齋藤豪先生に画像フィルタについて情報を提供して頂きました。

参考文献

- [1] A. M. Turing, The Chemical Basis of Morphogenesis, Philosophical Transactions of the Royal Society, 1952.
- [2] 近藤滋「シマウマは何故縞模様を持っているのか」
<http://www.fbs.osaka-u.ac.jp/labs/skondo/>