ウェーブレット変換による筆跡の解析

遠藤真樹　(指導教員：吉田裕亮)

1　はじめに

フーリエ変換は時間周波数解析の一種であるが, これをさらに発展させたものがウェーブレット変換である. ウェーブレット変換は, 近年 JPEG2000 などの画像圧縮をはじめとして様々な分野で応用がなされている.

本研究では, このウェーブレット変換を用いて筆跡の解析を行う. 文字の種類や大きさを変え, またフーリエ変換を比較対象として取り上げ, ウェーブレット変換の筆跡解析への適用可能性を検証する. なお変換結果を 2 次元に要約する目的で PCA 法を用いる. また, 最適基底選択の問題についても言及する.

2　ウェーブレット変換

フーリエ変換

$f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ に対して, 次をフーリエ変換という.

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

これを特に $L^2(\mathbb{R})$ に適当な方法で拡張すると, 写像 $f \to \hat{f}$ は全単射かつ等長変換となる.

このフーリエ変換は, 数学だけではなく CT スキャンなどの画像解析をはじめとする工学分野にも応用されている. 一方で, 基底が三角関数であるため, データの微細な挙動がすべての係数に影響する. この課題を解決するため, データに切り落とし関数をかけてフーリエ変換を行う短時間フーリエ変換というものも考えられたが, 幅広い周波数領域の解析には向いていない.

この課題を解決する一つの方法としてウェーブレット変換がある.

ウェーブレット変換

ウェーブレット変換とは, 小さな波 (ウェーブレット) を基底とする展開であり, ウェーブレット関数 ψ の拡大縮小・平行移動

$$\psi_{j,k} = M^{j/2}\psi(M^j x - k)$$

$$(M > 0,\ \ j,k \in Z,\ \ 0 \leqq k \leqq M^j - 1)$$

を基底とする $L^2(\mathbb{R})$ の展開である. ウェーブレットにはたとえば下の図のようなものがある.

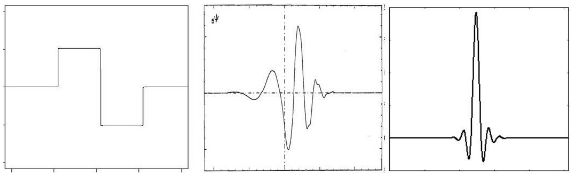

図 1: ウェーブレットの例
(左)Haar 基底 (中)Daubechies(右)Coiflet

フーリエ変換の基底が三角関数であるのに対して, ウェーブレット変換では有界コンパクトサポートもしくは急速に減衰する関数が基底である. そのためデータの一部区間のみを考える場合, 必要な基底はフーリエ変換に比べ少なくて済む. また, 時間領域の拡大縮小とともに解析可能な周波数も同時に調整される.

本研究では離散ウェーブレット変換を用いるが, その構成においては次の多重解像度解析が重要な役割を担う.

$L^2(\mathbb{R}^n)$ の部分空間の増大列 $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots$ が次の条件をみたすとき, 多重解像度解析という.

i.　(稠密性) $\cup_{j \in Z} V_j = L^2(\mathbb{R}^n)$

ii.　(分離性) $\cap_{j \in Z} V_j = \{0\}$

iii.　(スケーリング) $f(x) \in V_0 \leftrightarrow f(M^j x) \in V_j$

iv.　(正規直交性) $\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ は V_0 の正規直交系

φ はウェーブレット関数 ψ に対して, スケーリング関数とよばれる.

上の 4 条件を満たす増大列が存在するならば, 適当な M を用いて $\{M^{j/2}\psi(M^j x - n)\}_{j,k}$ と定めると $L^2(\mathbb{R})$ の基底となる. この基底によって展開することによって, 次の離散ウェーブレット変換が得られる.

$$f(x) = \sum_{j,k} \langle f(x), \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

3　PCA(主成分分析)

PCA 法 (Principal Component Analysis：主成分分析) とは, 多数の項目間の相関を少数個の特性値に要約する手法のひとつである.

具体的には各項目から相関行列を求め, 固有値分解を行う. 固有値は情報量を表し, 固有ベクトルは情報量の持つ意味合いを表している. そのため, 得られた固有値を大きい方から第一固有値 λ_1, 第二固有値 $\lambda_2 \cdots$ とし, 対応する固有値を掛け合わせることでその項目の特性を表すことができる.

なお m 次までの累積寄与率は次のように求められる.

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m}{\sum_{k=1}^{N} \lambda_k}$$

これは, m 個までの特性値がデータ全体に対して持つ情報量である.

4　筆跡の解析

本研究においては,「ウェーブレット変換の筆跡解析への適用可能性を検証する」という目的のもと, ウェーブレット変換を用いて筆跡の解析を行った. 文字の種類や大きさ, 基底を変え, 変換を施し, 考察を行った. 比較対象としてフーリエ変換を用いた. 具体的には

(a)　文字 [遠] の解析

(b) 文字 [小] の解析

(c) 拡大縮小を施した文字 [小] の解析

(d) 基底の比較

の 4 つの実験である．1〜3 については画像データを 256 × 256 の PBM 形式とし, 各変換後のデータを PCA 法を用いて 2 次元に要約し, 平面にプロットを行った.

(a) 文字 [遠] の解析

次の図は,[遠] という文字のウェーブレット変換（図 2）およびフーリエ変換（図 3）に PCA を施した結果である.

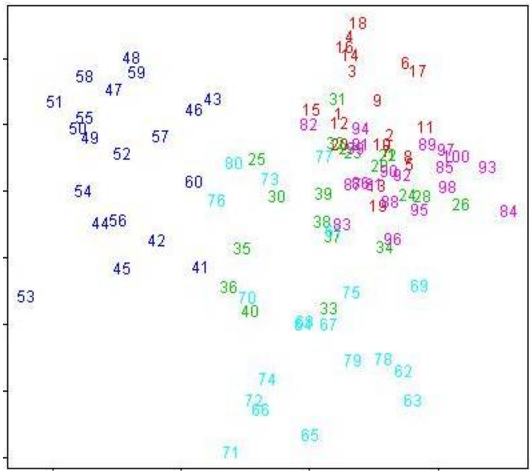

図 2: 文字 [遠] のウェーブレット変換結果

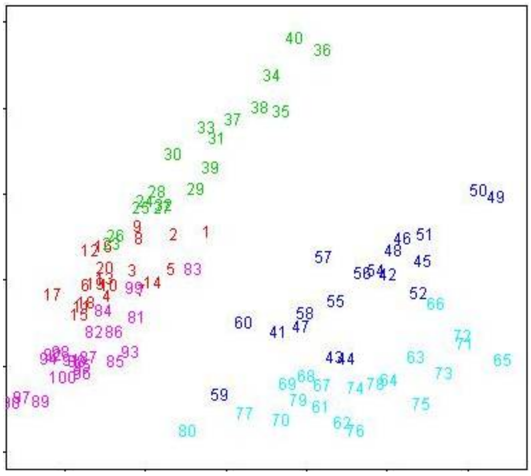

図 3: 文字 [遠] のフーリエ変換結果

データ数は各人 20 × 5 名の計 100. 同色は同一人物の筆跡である．どちらの変換も, 各筆者の筆跡ごとにグループが分かれていることは確認できる．また, もちろん肉眼で似ていると思われた筆跡は近い位置にプロットされていた.

(b) 文字 [小] の解析

これに対して, 簡素な漢字として [小] を選びプロットを行った．結果, おおまかに筆者によってグループは分かれたが, [遠] に比べ, 特徴を捉えられておらず, 重なりが多く見られた．これは得られる個人の特徴が [遠] に比べて少ないからであると思われる．これに対し, フーリエ変換はより良く特徴をつかんでいる.

(c) 拡大縮小を施した文字 [小] の解析

この結果をふまえて次に, 文字の大きさをランダムに変え, 解析を行った．これは, フーリエ変換はとくに文字の大きさの特徴に依存していると思われたからである．逆にウェーブレット変換は, 文字の大きさにあまり影響を受けないのではないかと推測した．結果, フーリエ変換については筆者の特徴がつかめなくなったが, ウェーブレット変換では, 緑色の筆跡についてはグループを区別することが可能となった.

(d) 基底の比較

以上のように, 文字の種類・大きさを変えて実験することに加え, 基底の比較を行った．Haar, 今回の実験で使用した Daubechies, Coiflet, そしてフーリエ変換の基底である三角関数の 4 つである．以下は [遠] および [小] の文字を変換した場合の PCA の累積寄与率の比較である.

	遠	小
Haar	23.1%	44.4%
Daubechies	24.1%	37.2%
Coiflet	18.4%	33.2%
フーリエ	5.5%	8.3%

図 4: 各基底における PCA の累積寄与率

定義から累積寄与率が高いほど, PCA 法で情報を集約しやすい基底といえる.

累積寄与率は [遠] の文字については Daubechies が 24.1 %で最も高く, [小] の文字については Haar が 44.4 %で最も高い結果となった．これは波形の特徴から, [小] の方がより Haar 基底で近似しやすいためと推測できる．またフーリエ変換は, ウェーブレット変換と比べると, 寄与率は低くなった.

5 今後の課題について

筆跡の解析に適した基底の選択手法について検討している．これについては, MDL, AIC やエントロピーを用いた手法などが提案されているようである．しかし, 用いる評価基準によって得られる結果は様々であり, 改良の余地があるように思われる.

また, ウェーブレット変換の実用においては, 複数のフィルタを組み合わせたウェーブレットパケットという手法が使われている．この応用も可能か検討すべきである.

以上のことに加え, より多くの文字について解析を行う必要があると考えられる.

参考文献

[1] J.J. ベネディット/M.W. フレジャー編　山口昌哉/山田道夫監訳. 1995. “ ウェーブレット 理論と応用 ”, Berlin, Springer-Verlag.

[2] 松嶋優貴, 白旗慎吾, 坂本亘. 2004. “ AIC によるウェーブレット基底関数の選択 ”:応用統計学 vol.33, No.2. 201-219.