モンテカルロ法による移流シミュレーション

関谷祐理　(指導教員：吉田裕亮)

1　はじめに

人がひとりで歩いていると考えたとき, 一定のスピードで前を向いて歩いていける. しかし人が多くいる場所となるとそうはいかなくなる. 都会の交差点では向かい側から歩いてくる人もいれば, 自分の前を遅く歩いている人もいる. 私たちは日常的に無意識の内に周りの状況をみて行動をしているのだ.

本研究では多人数の人がいるとき, 人はどのように集まって, 人の集団 (コロニー) を形成していくのかを, モンテカルロ法を用いた移流シミュレーションで検証を試みる.

2　モンテカルロ法

モンテカルロ法とは, 既成の理論のない問題や解析的解決のない問題を十分多数回のランダムな操作, あるいは, ランダム実験の結果を集め, 解や法則を近似的に求めようとする計算法のひとつである. モンテカルロ法は広範囲な問題に応用可能である.

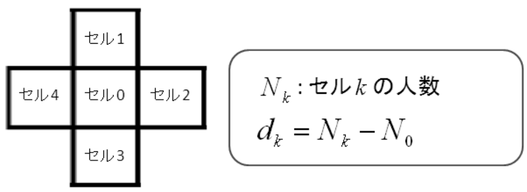
(1) 確率論的問題への応用
　問題に対して確率的な要素を乱数を用いて表現し, 現象の多数回の実験によって統計的に検討する.
　例:待合わせ問題での待ち行列の長さ
　　偏微分方程式を用いた拡散現象

(2) 決定論的問題への応用
　問題に対応する適当な確率モデルを設定し, 乱数を用いて多数回の実験によって近似値的に解を求める.
　例:ポアッソン方程式の境界値問題
　　定積分の評価

本研究では, 人の動きを確率論的モデルとして扱うことにする.

3　確率モデルの作成

広場に人が多く集まっていることを想定し, そこからどのようにコロニーを形成していくかをみるため, 人の移流シミュレーションを行う. 広場は正方格子に分割されたものとして考え, 人の動きはセルからセルへの移動で表すことにする.



人の動きは 5 つ（隣接する上下左右のセル, 現在いるセル）のセルのうち 1 つのセルを選んで進むこととし, 各セルに移る確率が状態によって変化する遷移過程として推移確率 P_k を

$$P_k = \frac{\exp(\lambda d_k)}{\sum_{i=0}^{4} \exp(\lambda d_i)} \qquad (\lambda > 0)$$

とおく. ただし境界においては後で述べる境界条件が課される.

4　コロニー

本研究ではコロニーを形成していく過程をみる. ここでコロニーとは, 隣合うセルに粒子が存在しなく, かつそのセルには粒子が集中しているセルのことをいう.

5　シミュレーションの手順

移流のシミュレーションは, 以下のように行う.

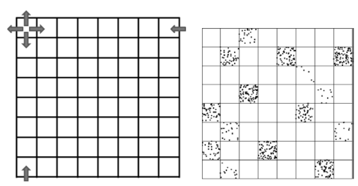
1. 正方格子を用意.
2. 分割した全てのセルに同数の粒子を置く.
3. ランダムにセルを選び, 選ばれたセルが空のときは, 選びなおす.
4. 選ばれたセルの中から, 1 点を 3 節で設定した推移確率に従って動かす.
5. 規定のステップに到達する, もしくは平衡状態になったら終了とする. ここで, 平衡状態とは, 選ばれたセルの中の粒子が隣接するセルにほとんど動かなくなる状態を指す.

6　境界条件

広場の内部領域おいては, 3 節で設定した推移確率に従い各セルの粒子の移動が決まるが, 境界においては以下の境界条件を考える. 境界条件として周期的境界条件と反射壁の 2 つを用意し, 移流シミュレーションを 4 節の手順に従って平衡状態になるまで実行した.

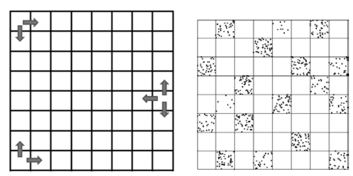
6.1　周期的境界条件のとき

左図は周期的境界を表したもの, 右図は結果である.



6.2　反射壁の境界条件のとき

左図は反射壁を表したもの, 右図は結果である.

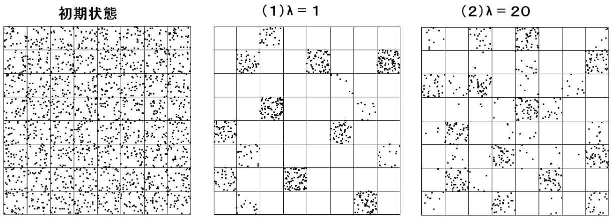


5.1 では境界面は繋がっているので, 境界面越しに隣合う 2 つのセルの両方に粒子が集まることはない. 境

界条件を変えるとコロニーが形成される場所に違いがあることが分かる.

7 移流シミュレーション

この節では, 格子数, 1 セルあたりの粒子数, λ の値, の 3 つのパラメータが, 形成されるれるコロニーにどのような影響を与えるかを調べる. シミュレーションを行う上での固定の条件としてステップ数:点の総数 ×10 回, 周期的境界条件とした. その結果, λ の値が最もコロニーの形成数に影響を与えていることが分かった. 下図に (1)λ=1 と (2)λ=20 のシミュレーション結果を図に示す.



λ=1 では全セル数の 1/4 程度コロニーが形成されているのに対して, λ=20 では全くコロニーが形成されていない. このことから, λ の値を変えると, コロニーの形成数が異なる可能性がある.

そこで, λ とコロニーの平均形成率（%）の関係をグラフで表すと以下のようになる. ここでは格子数 16×16 の場合を表示する.

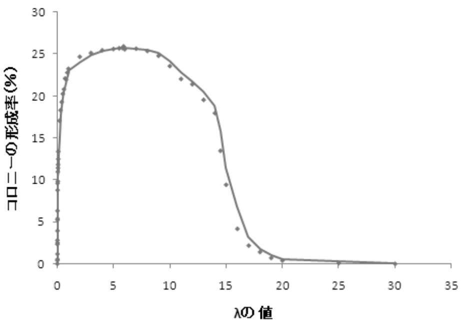


図 1: λ とコロニーの平均形成率

図 1 をみると, λ が 0 から 1 に移るとき急激に λ の形成率が増えている. そこで, まったくコロニーが形成されない λ=0 の状態から, コロニーの形成率がどのように増えているかを調べるため, λ=0 の近傍の両対数グラフをとり, λ に対する立ち上がりを調べたところ 40.48 と非常に高い値であった.

	形成率		形成率
λ=0.0100	0.0391	λ=0.0170	0.2188
λ=0.0120	0.0313	λ=0.0180	0.2305
λ=0.0150	0.0898	λ=0.0185	0.3359
λ=0.0160	0.1445	λ=0.0200	0.4688

表 1: λ=0 の近傍

8 コロニー間最小距離

7 節で得た数値実験をもとに, 移流シミュレーションで形成されるコロニーの間の距離に着目し, コロニーはどれくらいの距離で形成されているのかを調べる. また, コロニーはどのような配位で形成されているのかを調べるため, コロニーを全くランダムに置いた場合と比較する.

8.1 方法

まず 7 節の格子数 16×16 の結果から, λ=1,2,3,· · ·,15 に対するコロニーの平均個数と, 各コロニーの最も近いコロニーとの距離（コロニー間最小距離）の平均をとる. それとは別に,16×16 の格子上に実験で得た平均コロニー数個分のコロニーをランダムに置く. そのランダムに置かれたコロニー間最小距離を求め, その平均をランダム理論値と考える. コロニー間最小距離の平均とランダム理論値を比較しグラフで表す. なおランダムにおくコロニーの個数は小数第 1 位まで扱い, 置くコロニーの数を確率的に決める. 例えば数値実験でコロニー数が 3.5 個の場合, ランダムに置くコロニー数は乱数を用いて 1/2 の確率で 3 個のコロニーを, 1/2 の確率で 4 個のコロニーを置き, 3.5 個のコロニーを置いたこととする.

8.2 結果

図 2 から, 本シミュレーションで形成されるコロニーはランダムな場所に形成されるものであると考えられる.

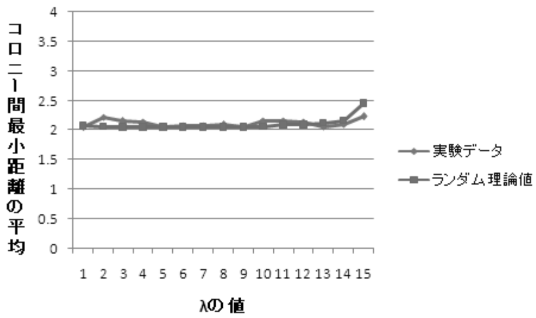


図 2: コロニー間最小距離の比較

	実験	ランダム		実験	ランダム
λ=1	2.046	2.065	λ=13	2.052	2.115
λ=2	2.218	2.054	λ=14	2.100	2.157
λ=3	2.149	2.048	λ=15	2.227	2.449

表 2: 図 2 の数値の一部

9 まとめと今後の課題

本研究では広場を想定し, 構成した確率モデルをもとに広場内で人が集団を作る人の移流シミュレーションを行うことができた. 形成されるコロニー数はパラメータ λ に依存し, そのコロニーはランダムに配位していると考えられる.

今後の課題としては, この確率モデルで格子の形を変える, 他の要因による推移確率の設定が考えられる.