モンテカルロ法の金融工学への適用

池田さつきジェシカ　(指導教員：浅本紀子)

1　はじめに

本研究では, ヨーロピアン・オプションの価格付けを行うにあたり, 単純なモンテカルロ法とブラック・ショールズの公式から導かれる数値とを比較した結果を評価することを目的としている. また金融のデータは対数正規分布に従うことが知られている. 仮にヨーロピアン・オプションが対数正規分布に従うこととするが, これを後の章で確認する.

2　言葉の定義

ヨーロピアン・オプション

オプションとは特定の期日に, 特定の売買を行う権利のことであり, この内ヨーロピアン・オプション (European option) とは, オプションの権利行使を満期日にしか出来ないオプション取引のことである. また「買う」権利をコールオプション,「売る」権利をプットオプションと言う.

無リスク金利

リスクのない金利のことで, 国債の利回りのことを指す. 運用で考えられる最低金利である.

モンテカルロ法

モンテカルロ法 (Monte Carlo method) とはシミュレーションや数値計算を乱数を用いて行う手法の総称であり,John von Neumann により考案された.

Box-Muller 法

Box-Muller 法は極座標法とも呼ばれ, 次のアルゴリズムにて標準正規分布に従う乱数を生成する.
(0,1] の要素 x_1, x_2 があるとき

$$y_1 = \sqrt{-2ln(1-x_1)}\cos 2\pi x_2$$
$$y_2 = \sqrt{-2ln(1-x_1)}\sin 2\pi x_2$$

3　ブラック・ショールズの公式

ブラック・ショールズの公式を次から順に追っていく.

ランダムウォーク

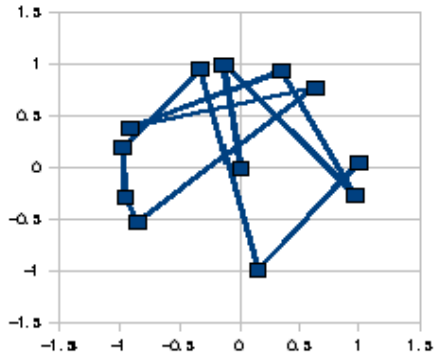
ランダムウォークとは次に現れる位置が確率的にランダムに決定される運動のことである. 以下の式で定義されている.
確率変数

$$\begin{pmatrix} X_i = 1 & \text{確率} & p \\ X_i = -1 & \text{確率} & q = 1-p \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

があり, かつそれらが独立として, それらの和

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n (n = 1, 2, \cdots)$$

として定義される.
有名な例としては原点を出発点として一定時間ごとに任意の方向に 1 移動し, その点から再び任意の方向に 1 移動する試行がある. 上のグラフはそのモンテカルロシミュレーションを行った結果である.

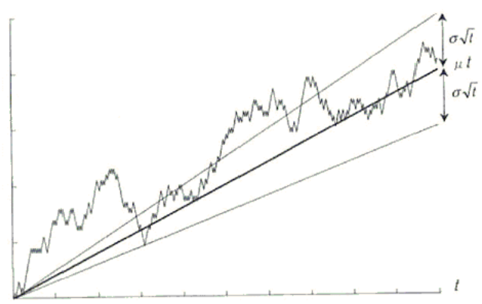


ブラウン運動 (ウィーナー過程)

ブラウン運動 (ウィーナー過程) は Norbert Wiener によって考案され, ランダムウォークの連続時間確率過程である. 以下の式で定義されている.
確率過程 $X(t), t \geq 0$ が
$X(0) \equiv 0$
時間の分点 $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_(n-1) < t_n$ で作った変化分 $X(t_0), X(t_1), \cdots, X(t_{n-1}), X(t_x)$ が独立かつ, それぞれ平均 $\mu(t_k - t_{k-1}), \sigma^2(t_k - t_{k-1})$ の正規分布
$N(\mu(t_k - t_{k-1}), \sigma^2(t_k, t_{k-1}))(k = 1, 2, \cdots, n)$
にしたがう.
また $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ のブラウン運動を標準ブラウン運動という. 以後標準ブラウン運動を $W(t)$ で表す.$W(t)$ の変化分を $\Delta\ W(\cdot)$ で表し, 分点系の各区間ごとに数列 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ がある時, 積和を考えると

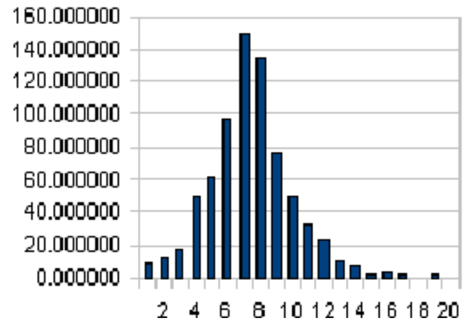
$$b_0\Delta\ W(t_0) + b_1\Delta\ W(t_1) + \cdots + b_{n-1}\Delta\ W(t_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k\Delta\ W(t_k)$$

となる.
次のグラフは標準ブラウン運動のグラフである. オプション価格をこのブラウン運動に当てはめて考える時,μ をドリフト・パラメータ,σ^2 をゆらぎと呼ぶ.



次頁のグラフは日経平均の 2006 年 6 月 1 日から 2008

年 5 月 31 日の 3 年間のデータの対数を取ったもののグラフである. 統計ソフト SPSS で検定を行ったところ, 有意確率が 0.05 であったので, これは正規分布を知っていると判断出来る. 他 9 種類の期間, 銘柄の違うデータについて調べたがいずれも正規分布を知っていると判断出来た. よって一般に金融データは対数正規分布に従うと言える.



伊藤過程

確率積分では b と t のみの関数であったが, 実際の株式投資戦略を考えたとき, その時点の $W(t)$ の値 x にも依存すると考えられる.

$$X(s) = \int_0^s A(t)dt + \int_0^s B(t)dW(t) + X(0)$$

で定義される過程を伊藤過程と呼び, この時それを関数 $g(t,x)$ で変換した $Y(t) = g(t, X(t))$ の微分形を与える公式こそが伊藤の公式である.

g の各変数による 1 階,2 階の偏微分が存在し, それらが連続であるという条件のもとで

$$\begin{aligned} dY(s) = &\frac{\partial g}{\partial h}(s, X(s)) + \frac{\partial g}{\partial x}(s, X(s))dX(s) \\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X(s))(dX(s))^2 \end{aligned}$$

となり最終的に伊藤の公式は

$$(\frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial x}A(s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}B(s)^2)ds + \frac{\partial g}{\partial x}B(s)dW(s)$$

となる.

ブラック・ショールズの公式

1 種類の配当のない株と 1 種類の債権の 2 つが存在する証券市場モデルで, 満期 T において行使価格が K であるヨーロッパ・コール・オプションの価格決定式を伊藤の公式を用いて考えると次の結果が得られる. なお債権は指数型のドリフト項を持つとする.ρ は無リスク金利のことを指す.(ブラック・ショールズモデル)

$$\begin{aligned} dX_0(s) = &\quad \rho(s)X_0(s)ds, X_0(0) = 1 \\ dX_1(s) = &\quad \alpha(s)X_1(s)ds + \beta(s)X_1(s)dW(s) \end{aligned}$$

とおくことが出来, また請求権を $F = f(X_1(T))$ とすると

$$p(F) = x_1\phi(u) - \exp^{\rho T} K\phi(u - \beta\sqrt{T})$$

ただし

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} \exp^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$u = \frac{log_e(\frac{x_1}{K}) + (\rho + \frac{1}{2}\beta^2)T}{\beta\sqrt{T}}$$

これがブラック・ショールズの公式である.

4 オプション価格の計算

Box-Muller 法を用いて算出した乱数を用いた単純なモンテカルロ法及びブラックショールズの公式にてオプション価格を計算し比較する.
具体例として次の銘柄についてヨーロピアン・コール・オプション価格を計算する.
現在価格 $S_0 = 950,000$
権利行使価格 $K = 1,000,000$
無リスク金利 $r = 0.0010$
期間 $T = 0.5000$
ボラリティ$\sigma = 0.3089$ である.
(なおボラリティについては過去の株価の変動率を年率に直したもの (ヒストリカル・ボラティリティ) を採用し,2008 年 2 月 6 日現在の数値を使用する.)

ブラック・ショールズの公式から算出したコール・オプション価格は $p(F) = 11.23708$, すなわち 11 万 2371 円である. 一方単純モンテカルロ法から算出したコール・オプション価格は 10 万回の計算を経た結果 $p(F) = 11.224989$,11 万 2250 円となった.

他パラメータで試行を 200 回行ったが, いずれも誤差範囲は権利行使価格の 0.5 %以内に収まった.

5 まとめと今後の課題

ヨーロピアン・コール・オプションの価格を決定するにあたり, 確かにブラック・ショールズの公式から算出された価格に一定の精度でモンテカルロ法によるシミュレーション結果が近付くことが判った.

今後の課題としては, 今回は 1 銘柄の価格についてのみ取り扱ったが, 2 銘柄以上を扱いポートフォリオを組むこと, 乱数の発生方法を変え誤差精度を高めることなどが挙げられる. また実際の株及び債権を用いて運用を行い, 今回扱った理論を実証してみたいと思う.

参考文献

[1] 松原望：入門確率過程　東京図書,2003 年

[2] 湯前望・鈴木輝好：モンテカルロ法の金融工学　朝倉書店,2000 年

[3] 投資レーダー：ヒストリカル　ボラリテリティ http://www.toushi-radar.co.jp/data/graph.htm