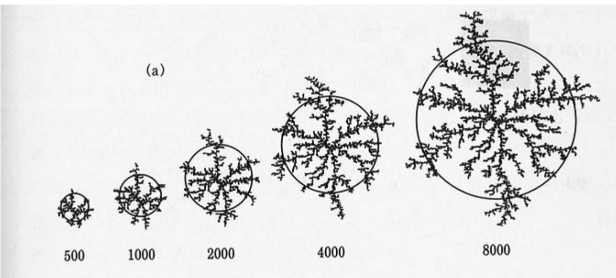
DLA(拡散律速凝集)のフラクタル

筒井めぐみ　（指導教官:竹尾富貴子）

1　本研究の目的

雪の結晶、電析によって作られる樹枝状の析出物である金属葉などは自己相似性（部分を拡大すると全体と同じように見える性質）をもつ。これらは、DLA(Diffusion Limited Aggregation ; 拡散律速凝集)といわれる方法でモデル化される。

本研究では、このモデル化のプログラムを作成し、生成したDLAのフラクタル次元をさまざまな方法で求めて、検討する。



2　DLAの構成化

1）２次元平面の原点にクラスターを置く。

2）無限遠方から粒子を放ち、ランダム・ウォークさせる。

3）ランダム・ウォークしている粒子とクラスターが触れると、そこで粒子を付着させ、2）に戻る。また、粒子がクラスターの遠方に去ってしまった場合にも2）に戻る。

3　フラクタル次元・・・フラクタルにはパターンの粗密や入り込み具合いの程度に差がある。これを定量化して数値で表したのがフラクタル次元という量。

フラクタル次元の求め方

1）ボックスカウント法

河川、樹木、血管の分岐のようなパターンをピクセルサイズεのピクセルで覆ったとき、覆うのに必要な最小のピクセルの数を N(ε)とすると $N(\varepsilon)\sim\varepsilon^{-D}$ となるならば、次元 $D=\dfrac{\log N(\varepsilon)}{\log\dfrac{1}{\varepsilon}}$ と表される。

2）回転半径法

パターンの大きさの目安として回転半径を使って自己相似性をチェックしフラクタル次元を求める方法。与えられたパターンを構成する要素の個数を N、i 番目の構成要素の位置ベクトルを r_i (i=1,2,・・・N)とし、回転半径を $R_g=\sqrt{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(r_i-r_c)^2}$ と表す。r_c は与えられたパターンの重心であり、$r_c=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}r_i$ となる。パターンの大きさの目安として、パターンの差し渡しではなく、回転半径を使うと大きさの目安としてどちらも互いに比例するので、視野拡大法で成り立った $N\sim L^D$ の L を R_g に置き換えることができ $N\sim R_g^{\ D}$ が成り立つ。

3）密度相関関数法

与えられたパターンの密度相関関数を計算してフラクタル次元を求める方法。（パターンをピクセルで覆い、適当なピクセルを１つ選んでそれを原点０とする座標系を考える。位置 r' にあるピクセルがパターンの一部を含んでいるときには量 $\rho(r')$ は１の値をとり、そうでないときは０であると定義する。$\rho(r'+r)\rho(r')$ は、パターンを構成するピクセルがお互いにどのような関係で分布しているかを示す。このとき、密度相関関数 C（r）$=\dfrac{1}{N}\sum_{r'}\rho(r'+r)\rho(r')$ に対し、C(r)～ $r^{-\alpha}$ が成り立ち、$N=\int^{R_g}C(r)d^d r$ と合わせると、$N\sim R_g^{\ d-\alpha}$ が得られ、次元 D＝d－α となる。d：パターンがある空間の次元。）

4　研究方法

DLA構成法に基づき、JavaEclipseでプログラムを作り、DLA図形を作成した。その図形に対し、さまざまな方法でフラクタル次元を求めた。

５　結果

コッホ曲線のボックスカウント法による次元

データの数	6,000	9,500	9,550	10,000	30,000
Koch の box	1.202	1.246	1.246	1.243	1.288

（Ｉ）種を中心に置く場合

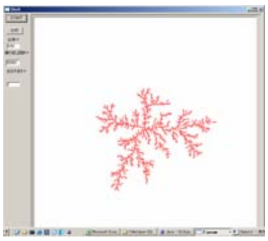
データ名	1	2	3	4	5
データの数	6,000	10,000	10,000	40,000	100,000
クラスター	1,743	2,374	2,662	8,790	12,522
correlation	1.619	0.2 1.627	1.631	1.648	0.1 1.674
boxcount	1.405	1.438	1.439	1.526	1.54
回転半径	1.58	1.558	1.581	1.631	1.631

（Ⅱ）種を直線状に置き、間隔を１にした場合

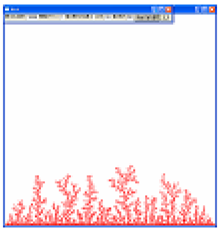
データ名	b_1	b_2	b_3	b_4
データの数	9,500	10,000	30,000	100,000
クラスター	8,564	8,712	23,308	65,141
correlation	0.05 1.623	0.05 1.647	0.05 1.729	0.05 1.804
boxcount	1.51	1.521	1.613	1.709

（Ⅲ）種を直線状に置き、間隔を変化させた場合

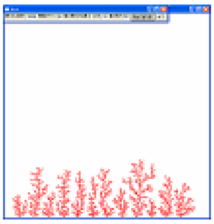
データ名	間 5	間 20	間 30	間 50	間 50
データの数	10,000	10,000	10,000	30,000	100,000
クラスター	8,594	7,956	7,384	20,331	0.2 0.241
correlation	0.05 1.619	0.05 1.590	0.03 1.528	0.15 1.669	0.2 1.759
boxcount	1.506	1.5	1.465	1.602	1.71



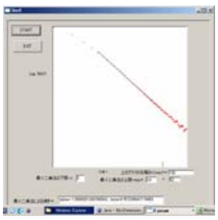
（Ｉ）の DLA 作成図



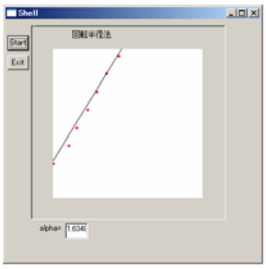
（Ⅱ）の DLA 作成図



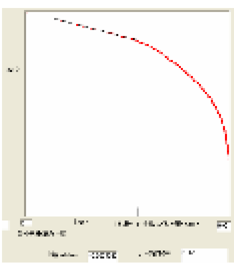
（Ⅲ）の DLA 作成図



ボックスカウント法



回転半径法



Correlation 法

①、ボックスカウント法のプログラムのチェックのためコッホ曲線で計算した。理論値は log4/log3=1.261 であるが、データ数が少ないと次元が小さいが､データが多くなると理論値に近づいた。

②、種を中心に置いた DLA の場合
フラクタル次元の理論値は、5/3=1.667 と言われている。
１）どの方法で次元を求めてもクラスターの数が増えるほど、次元は大きくなった。
２）回転半径法と密度相関関数法は次元が近い値になっており、データ数が多いと理論値に近づいている。ボックスカウント法では少し値が小さい。

③、種を直線状に敷き詰めて置いた DLA の場合
この場合は回転半径法は適用できない。
１）データの数が多くなると次元が大きくなるのは同じだ。
２）種を中心に置いた場合より種を直線状に置いた方が、次元は大きくなる。
３）correlation 法では、ｒの値が大きいところでは、グラフにばらつきが大きいため、最小二乗法のデータを取るのにｒの値が小さい範囲のみ適用して計算した。その際、上限はグラフを見て、検討をつけた。
４）データ数が小さいほど、上限の値を小さくする必要がある。

④、種を直線状に間隔をおいて置いた DLA の場合
１）同じデータ数で間隔を大きくすると、ボックスカウント法、密度相関関数法ともに次元は小さくなった｡(クラスターの総数が少なくなるからと思われる。)
２）データ数を大きくすると、ボックスカウント法、密度相関関数法ともに次元は大きくなった。

６　今後の課題

Correlation 法のｒの上限をグラフをみて決めたが、なんらかの方法で規則性を見つけたい。

文献

[1]　高安　秀樹, フラクタル科学, 朝倉書店(1987).

[2]　松下　貢, フラクタルの物理（Ｉ）(Ⅱ), 裳華房(2002).