平衡なジャンケンとその性質

豊永明香里　(指導教員：長尾篤樹)

1　はじめに

理論計算機科学における組合せ理論では，ゲームの必勝手順やパズルの解を得る計算に関する複雑さに対する研究と同様にゲームやパズルの構造に関する研究も多く行われている．例えば，誰にとっても身近なゲームであるジャンケンに対しても，無駄な手を持たない構造 [1] や，無駄な手が存在しない場合でも最適反応戦略では選択されない手が存在する [3] といった研究が行われている．本稿では [1] で提案された一般化ジャンケンを基に平衡型ジャンケンを定義し，特徴的な性質を示す．次に，平衡型ジャンケンの中でも特別な性質を持つ狭義平衡型ジャンケンを定義し，特徴的な性質を示す．

2　一般化ジャンケン

ジャンケンは，各手を頂点とし任意の 2 頂点間に手同士の勝ち負けの関係を表現する有向辺を持つグラフで表現できる．同じ手同士の勝負でしかあいこが発生しないジャンケンは，非対称完全有向グラフ，すなわちトーナメント $T = (V, A)$ で表せる．本研究では，n 手ジャンケンを T_n，この行列表記を M_{T_n} と表記する．ジャンケンは反対称性を持つため，M_{T_n} は対角成分が 0 であり，非対角成分が -1 もしくは 1 である反対称行列となる．また，頂点 $x, y \in V$ について，x が y に勝つ手である場合 $x \to y$ と表記する．

あるジャンケンにおける手の強さの違いを表す指標として不規則性 [2] が存在し，一般化ジャンケンの不規則性は以下のように定義されている．

Definition 1. *[2] n 手ジャンケン T_n において，T_n を表すトーナメント (V, A) 上の頂点 $x \in V$ の出次数を $deg^+(x)$, 入次数を $deg^-(x)$ として，T_n の不規則性 $irr(T_n)$ を以下のように定義する．*

$$irr(T_n) = \sum_{x \in V} (deg^+(x) - deg^-(x))^2$$

3　平衡型ジャンケン

同じ手数のジャンケンの中で不規則性が最大となるジャンケンとして MOON 型ジャンケンが [1] で言及されている．本研究では反対に不規則性が最小，すなわち 0 になるものに着目する．

Definition 2. *n 頂点トーナメント T_n において，$irr(T_n) = 0$ であるようなジャンケンを平衡型ジャンケンとする．*

全探索の結果，7 手平衡型ジャンケンは 5 通り存在し，任意の n に対して 1 通りのみ存在するとは限らないことが判明した．

一般の奇数 n に対して存在する n 手平衡型ジャンケンの任意の辺に対して，辺を構成する 2 頂点とその他の頂点の勝敗関係を考え，集合を分類すると，それぞれの頂点集合に含まれる頂点数には以下のような関係性があることが示せる．

Lemma 3. *n 手平衡型ジャンケンにおいて，$x \to y$ となる任意の 2 頂点 $x, y \in V$ による辺 (x, y) について考える．このとき，頂点 x, y が共に勝つ頂点の集合のサイズを s，頂点 x, y が共に負ける頂点の集合のサイズを t，頂点 x が負け y が勝つ頂点の集合のサイズを α，頂点 x が勝ち y が負ける頂点の集合のサイズを β とすると，次の関係が常に成り立つ．*

$$\beta = \alpha - 1 \qquad s = t$$

(a)

(a)	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	-1	1	-1	-1
2	-1	0	1	1	-1	1	-1
3	-1	-1	0	1	1	-1	1
4	1	-1	-1	0	1	1	-1
5	-1	1	-1	-1	0	1	1
6	1	-1	1	-1	-1	0	1
7	1	1	-1	1	-1	-1	0

(b)	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	-1	-1	-1
2	-1	0	1	1	1	-1	-1
3	-1	-1	0	1	1	1	-1
4	-1	-1	-1	0	1	1	1
5	1	-1	-1	-1	0	1	1
6	1	1	-1	-1	-1	0	1
7	1	1	1	-1	-1	-1	0

(c)	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	-1	-1	-1
2	-1	0	1	-1	1	1	-1
3	-1	-1	0	1	1	-1	1
4	-1	1	-1	0	1	-1	1
5	1	-1	-1	-1	0	1	1
6	1	-1	1	1	-1	0	-1
7	1	1	-1	-1	-1	1	0

(d)	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	-1	-1	-1
2	-1	0	1	-1	1	1	-1
3	-1	-1	0	1	-1	1	1
4	-1	1	-1	0	1	-1	1
5	1	-1	1	-1	0	1	-1
6	1	-1	-1	1	-1	0	1
7	1	1	-1	-1	1	-1	0

(e)	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	-1	-1	-1
2	-1	0	1	1	1	-1	-1
3	-1	-1	0	-1	1	1	1
4	-1	-1	1	0	-1	1	1
5	1	-1	-1	1	0	1	-1
6	1	1	-1	-1	-1	0	1
7	1	1	-1	-1	1	-1	0

図１　7 手平衡型ジャンケンの分類

先行研究 [1] では，同じ手数の中で 3 サイクル数が最小のジャンケンとして MOON 型ジャンケンが定義されているが，平衡型ジャンケンの 3 サイクル数を観察すると，以下のような特徴的な性質が見られる．以降，[1] に倣いトーナメント T_n の 3 サイクル数を $c(T_n)$ と表記したとき，以下の事実を確認した．

Proposition 4. *n 手平衡型ジャンケン T_n の 3 サイクル数 $c(T_n)$ は，トーナメント内の任意の 3 サイクルを反転させても一定であり，$c(T_n)$ は以下の値を取る．*

$$c(T_n) = \frac{n(n+1)(n-1)}{24}$$

また，3 サイクル数と不規則性に関して，先行研究 [1] では次のような補題が示されている．

Lemma 5. *[1] T_n を頂点数 $n \geq 1$ のトーナメントとすると，次の式が成り立つ．*

$$irr(T_n) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} - 8c(T_n)$$

補題 5 より，不規則性が 0 になるような n 頂点トーナメント，すなわち n 手平衡型ジャンケンが持つ 3 サイクル数は，n 頂点トーナメントの 3 サイクル数の最大値であることがわかる．

Corollary 6. *n 手平衡型ジャンケンが持つ 3 サイクル数は，n 頂点トーナメントにおける 3 サイクル数の最大値である．*

これまでの議論から，平衡型ジャンケンは MOON 型ジャンケンと対照的な性質を持つジャンケンといえる．

4　狭義平衡型ジャンケン

3 章では，1 頂点の入出次数から定義した平衡型ジャンケンは同じ手数 n の下で構成される限り同じ数の 3 サイクルを持つという性質が確認できた．本章ではこれに対し，辺に対して拡張した平衡なトーナメントの概念について考える．以降，n 手平衡型ジャンケンの任意の辺 $(x, y) \in A$, ただし $x \to y$ について，辺 (x, y) が含まれる 3 サイクルの数を $c(x, y)$ と表記する．

Definition 7. *n 手平衡型ジャンケン T_n の $x \to y$ であるような全ての辺 $\forall(x, y)$, に対して，$c(x, y)$ が全て等しくなる T_n を狭義平衡型ジャンケンとする．*

4.1 狭義平衡型ジャンケンの性質

本節では，狭義平衡型ジャンケンが持ついくつかの特徴的な性質を示す．まずは, 補題 3 の発展とも言える補題を示す．

Lemma 8. n 手狭義平衡型ジャンケンにおいて，補題 *3* と同様に任意の頂点 $x, y \in V$ で構成される辺 (x, y) に対して s, t, α, β を定義すると，次の関係が常に成り立つ．

$$\alpha = \frac{n+1}{4}, \quad \beta = s = t = \frac{n-3}{4}$$

平衡型ジャンケンを行列として観察すると，この行列を二乗した非対角成分が全て 1 となるという特徴的な性質が，狭義平衡型ジャンケンであるとき，またその時に限り現れることがわかる．

Proposition 9. T_n が狭義平衡型ジャンケンであるとき，またそのときに限り T_n の行列表現 M_{T_n} を二乗すると非対角成分が全て 1 となる．

平衡型ジャンケンの行列表示を二乗した非対角成分に関しては，次の定理が成り立つ．

Theorem 10. T_n を n 手平衡型ジャンケンとする．$n \equiv 1 \mod 4$ であるとき，T_n^2 の非対角成分は 4 を法として 3 と合同となる．$n \equiv 3 \mod 4$ であるとき，T_n^2 の非対角成分は 4 を法として 1 と合同となる．

命題 4.1，定理 10 より，以下の系が導出される．

Corollary 11. n 手ジャンケン T_n が狭義平衡型ジャンケンであるならば，$n \equiv 3 \mod 4$ である．

一般の n に対する n 狭義平衡型ジャンケンを観察することで，n に対する平方剰余の分布がすべての非対角成分が 1 となる条件に影響を与えることを確認した．ここで，整数 a が整数 p の整数剰余とは，a が p を法として何らかの平方数と合同であることを指す．. これにより，以下の定理を得た．

Theorem 12. n は素数であり，$n \equiv 3 \mod 4$ とする．このとき，$M_{T_n}(a, b) = \left(\frac{b-a}{n}\right)$ であるような巡回ジャンケン T_n が n 手狭義平衡型ジャンケンとして存在する．ここで $\left(\frac{b-a}{n}\right)$ はルジャンドル記号であり，以下の値を取る．

$$\left(\frac{b-a}{n}\right) = \begin{cases} -1 & (b-a \text{ が } n \text{ の非平方剰余}) \\ 0 & (b=a) \\ 1 & (b-a \text{ が } n \text{ の非零平方剰余}) \end{cases}$$

また，ある手数の狭義平衡型ジャンケンが存在する時，同じ手数に他に同型ではない狭義平衡型ジャンケンは存在しないことも示せる．

Theorem 13. 任意の整数 n において，n 手狭義平衡型ジャンケンは同型を除いて高々 1 通りしか存在しない．

計算機実験の結果から狭義平衡型ジャンケンは n が合成数である $n = 15, 27$ には存在しないことがわかっている．したがって経験的に以下の仮説が挙げられる．

Conjecture 14. n 手狭義平衡型ジャンケンが存在するとき，またその時に限り n は素数かつ $n \equiv 3 \mod 4$ である．

5 2 本ジャンケン

本章では一般化ジャンケンのさらなる拡張として 2 本ジャンケン [4] について解析する．先行研究 [4] では 2 本ジャンケンを以下のようなルールとし，プレイヤー 1 人が選択する手の組み合わせを { グー，パー } のように表記する．

1. n 手の中から 2 手選び相手に見せる．ただし,{ グー，グー } のように同じ手を 2 つ選ぶ出し方は無駄な手 [1] となるため，プレイヤーによって選ばれないものとする．
2. 相手の 2 手を確認した後，各プレイヤーは自分が選択した 2 手から勝負する手を 1 手選び出す．
3. 自分と相手の出した手に設定された勝敗関係により勝負がつく．

一般化ジャンケン T_n に対し，その勝敗関係を利用した 2 本ジャンケンを T_n^2 と表記し，T_n^2 を T_n を二本化したジャンケンと呼ぶ．

2 本ジャンケンの 2 手の関係性は 4 つに分類でき，[4] ではそれぞれの辺に最適混合戦略から導出される勝率が重み w として付与されている．関係性ごとに辺に与えられる重みは，$w = 1, 1/3, 0, 0$ の 4 通りとなる．

5.1 2 本ジャンケンと不規則性

n 手ジャンケン T_n を二本化したジャンケンの不規則性は $\mathrm{irr}^2(T_n)$ と表記され，次のように定義されている．

Definition 15. *[4]* 頂点 $\{a, b\}$ から頂点 $\{c, d\}$ への辺に重みを付与し，頂点 $\{a, b\}$ から出る有向辺の重みの総和を $deg^+(\{a, b\})$，頂点 $\{a, b\}$ に入る有向辺の重みの総和を $deg^-(\{a, b\})$ として, 定義 *1* と同様に計算する．

不規則性が 0 となるジャンケンを平衡型ジャンケンと定義している一方で，二本化しても不規則性が 0 になるような平衡型ジャンケンが存在すること，また全ての平衡型ジャンケンに該当する性質ではなく一部のみに現れる性質であることが確認できた．

Theorem 16. T_n を n 手平衡型ジャンケンとする．T_n を二本化しても不規則性が 0 であるとき，またそのときに限り T_n は狭義平衡型ジャンケンである．

6 まとめと今後の展望

本研究では平衡型ジャンケンと狭義平衡型ジャンケンの定義を行い，一般の n に対して成り立つそれぞれのジャンケンの性質を示した．また，狭義平衡型ジャンケンは [4] で定義された 2 本ジャンケンの不規則性が 0 になる形と一致することを示し，一般化を行った．今後の展望として，狭義平衡型ジャンケンが成立する必要十分条件としてルジャンドル記号に関連する性質の必要性を示すことや，仮説 14 の証明が考えられる．

参考文献

[1] Hiro Ito. How to generalize janken–rock-paper-scissors-king-flea. pages 85–94, 2012.

[2] 伊藤大雄．一般化ジャンケン．**オペレーションズ・リサーチ***: 経営の科学=[O] perations research as a management science [r] esearch*, 58(3):156–160, 2013.

[3] 小松秀平 and 小野廣隆. 一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解析. 2015.

[4] 豊永明香里 and 長尾篤樹. Moon 型 2 本ジャンケンの不規則性. 2023.