Grid graph 周辺のグラフクラスにおける最大幸福集合問題

足立有香　(指導教員：長尾篤樹)

1　はじめに

グラフはネットワーク構造を表現することができ, 例えば大学内での友人関係や企業間の取引関係といった社会ネットワークを表す際に用いられる．これらの社会ネットワークを表現するグラフは人物や企業等を頂点とし, それら同士の関係を辺として表している．この社会ネットワークにおける同類性から, 最大幸福集合問題 (MaxHS) が「頂点部分集合問題」として定式化された [2]．MaxHS は, ブロックグラフや区間グラフなどでは多項式時間アルゴリズムが存在することが知られている一方で, 分割グラフや二部グラフなどでは NP 困難であることが先行研究で証明されている [1]．その中でも未解決問題とされている平面グラフへのアプローチとして，grid graph 周辺における MaxHS の計算量クラスに着目をし研究を行った．本稿では困難性に対する結果として, 穴の形を制限した重み付き grid graph における MaxHS が NP 困難である証明の概要を記述する．加えて solid grid graph における MaxHS の多項式時間アルゴリズムを提案する．

2　数学的定義

本章では, 重み付きグラフにおける最大幸福集合問題と, 穴の形を制限した grid graph の定義を紹介する．

2.1　最大幸福集合問題

無向グラフ $G = (V, E)$ とその頂点集合 $S \subseteq V$ に対して, 頂点 v とその隣接頂点が S にあれば幸福, そうでなければ不幸であるという．

Definition 1 (最大幸福集合問題)**.** 最大幸福集合問題 *(MaxHS)* は以下のような問題である．

入力：無向グラフ $G = (V, E)$ および整数 k

出力：幸福な頂点の個数が最大となるような k 個の部分集合 $S \subseteq V$

[1]

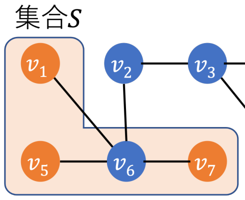

図 1　無向グラフ $G = (V, E)$ および整数 $k = 4$ が与えられた場合の集合 S の取り方の例

2.2　重み付きグラフにおける最大幸福集合問題

頂点の重み付き無向グラフ $G = (V, E)$ とその頂点集合 $S \subseteq V$ に対して, 頂点 v とその隣接頂点が S にあれば幸福, そうでなければ不幸であるという．

Definition 2 (重み付きグラフにおける MaxHS)**.** 重み付き *MaxHS* は以下のような問題とする．

入力：重み付き無向グラフ $G = (V, E)$ および整数 k

出力：幸福な頂点の重みの総和が最大となるような全体の重みの和が k 以下の部分集合 $S \subseteq V$

2.3　Grid graph

本節では grid graph 周辺のグラフについての定義を行う．

Definition 3 (Grid graph)**.** 頂点が整数座標上にあり, 辺の長さが単位長であるグラフを *grid graph* と呼ぶ．

Definition 4 (Solid grid graph)**.** 内部のすべての面が単位面積を持つような平面に埋め込むことができる *grid graph* を *solid grid graph* と呼ぶ．

Definition 5 (Grid graph の穴)**.** 単位長 4 辺で構成されていない極小なサイクルを *grid graph* の穴と呼ぶ．

今回は特に座標平面上で正方形となる穴のみを扱う．

3　部分集合の要素数を指定した部分和問題

本章では部分和問題から部分集合の要素数を制限した部分和問題へ多項式時間帰着を行うことで, 部分集合の要素数を制限した部分和問題が NP 完全であることを証明する．

はじめに, それぞれの問題の定義を紹介する．

Definition 6 (部分和問題)**.** 部分和問題は以下のような問題である．

入力：整数集合 $T = \{a_1, \ldots a_n\}$, 整数 l

問題：和が l となるような T の部分集合が作れるか．

Definition 7 (部分集合の要素数を指定した部分和問題)**.** 部分集合の要素数を指定した部分和問題は以下のような問題である．

入力：整数集合 $T = \{a_1, \ldots a_n\}$, 整数 l, 自然数 $\alpha(\alpha \neq 0)$

問題：和が l となり, 要素数が α 個となるような T の部分集合が作れるか．

部分和問題から部分集合の要素数を制限した部分和問題への帰着のために以下のアルゴリズムを考える．整数集合 $T = \{a_1, ..., a_n\}$, 整数 l が与えられたとき, 部分集合の要素数を指定した部分和問題の入力を $T' = \{a_1, ..., a_{2n}\}$, 整数 l, 自然数 $\alpha = n(\alpha \neq 0)$ とする．ただし, $a_{n+1} = ... = a_{2n} = 0$ である．

Theorem 8. 部分集合の要素数を指定した部分和問題は *NP* 完全である．

$T = \{a_1, ..., a_n\}$ から総和が l となるような集合を作れるとき, かつそのときに限り, $T' = \{a_1, ..., a_{2n}\}$ から n 個取った総和が l となるような集合を作れる．

4　穴の形を制限した重み付き grid graph の NP 困難性

本章では部分集合の要素数を制限した部分和問題から多項式時間帰着を行うことで, 穴の形を制限した重み付き grid graph 上の最大幸福集合問題が NP 困難であることを証明する．

帰着のために以下のアルゴリズムを考える．要素数を指定した部分和問題の入力を, 整数集合 $T = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, 整数 l, 自然数 $\alpha(\alpha \neq 0)$ とし, T, l, α から図 2 のようなグラフを構成する．x_i の頂点の重みを $20\alpha a_i$ とし, x_i に隣接する x_i 以外の頂点の重みを全て 1 とする．この頂点 x_i とそれに接続する重み 1 の頂点をまとめて「3×3 の領域 a_i」と呼ぶこととする．それ

以外の頂点 y の重みを $200\alpha l$ とする．3×3 の領域 a_i をまとめて MaxHS の解 S に含めたとき，$100\alpha a_i+4$ のうち不幸な頂点の重みの総和は 4，幸福な頂点の重みの総和は $100\alpha a_i+4$ である．全体のグラフは図 3 のとおりである．上から 2×2 の正方形の穴と 3×3 の領域 a_i を交互に並べ周りを重み $200\alpha l$ の頂点 y で囲むように構成する．T から 3×3 の領域 a_i を α セット MaxHS の解 S に含めたとき，不幸な頂点の重みの総和は 4α，幸福な頂点の重みの総和は $100\alpha l$ となる．

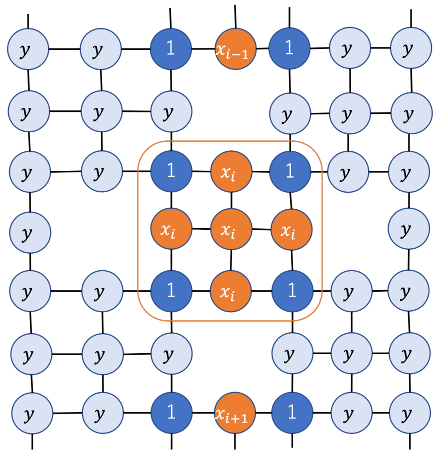

図 2　T, l, α から構成した帰着グラフ

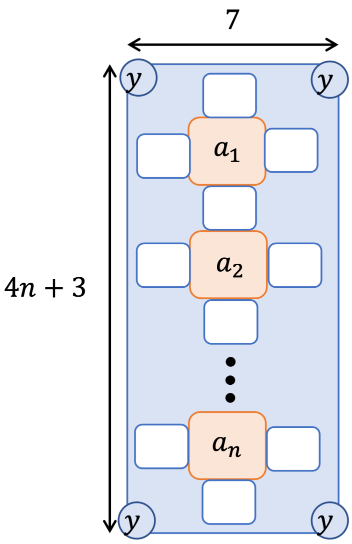

図 3　T, l, α から構成した帰着グラフの全体

Theorem 9. 重み付き *grid graph* における *MaxHS* は *NP* 困難である．

整数集合 $T=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ から α 個取った総和が l となるような集合を作れるとき，かつそのときに限り，T, α, l より構成したグラフ G から重みの総和が $k=100\alpha l+4\alpha$ となる頂点の部分集合 S を選択し，S に含まれる幸福な頂点の重みの総和を $100\alpha l$ とすることができる．

5 Solid grid graph における多項式時間アルゴリズム

本章では修士論文の業績の残りを記載する．詳細な定義等に関しては修士論文本稿を参照してもらいたい．

以下に solid grid graph 上での多項式時間アルゴリズムを提案する．$S_D(e_1, e_2, k)$ を集合を 2 つに分割したときの最小の不幸な頂点数とし，$S_I(e_1, e_2, k)$ を大きな集合から取り除いてできる集合の最小の不幸な頂点数とする．また，$Gap(e_1, e_2, k)$ を大きな集合から取り除いた際の不幸な頂点数のズレを修正するための関数とする．このとき以下の再帰で最適解を構成することができる．

$$
\begin{aligned}
&S(e_1, e_2, k) = \min[S_D(e_1, e_2, k), S_I(e_1, e_2, k)]\\
&S_D(e_1, e_2, k) = \min_{0\le i\le k, e_1\succ e_1'\succ e_2'\succ e_2}[S(e_1, e_1', i)\\
&+S(e_2', e_2, k-i), S(e_1, e_2, i) + S(e_1', e_2', k-i)]\\
&S_I(e_1, e_2, k) = \min_{0\le i\le k, e_1\succ e_1'\succ e_2'\succ e_2}[S_0(e_1, e_2, j)\\
&+S_0(e_1', e_2', j-k) + Gap(e_1', e_2', j-k)]
\end{aligned}
$$

$$
Gap(e_1, e_2, k) = \begin{cases} 0 \\ (S_0(e_1, e_2, k) = 0 \text{ の場合}) \\ 1 \\ (S_0(e_1, e_2, k) \neq 0 \text{ の場合}) \end{cases}
$$

このアルゴリズムの計算時間は $O(n^5)$ である．

6 まとめと今後の展望

穴の形を制限して個数を制限しない重み付き grid graph 上の MaxHS が NP 困難であることの証明と solid grid 上での多項式時間アルゴリズムの構築を行なった．重み付き grid graph 上の NP 困難性の証明を unit disk graph で応用しようとすると，グラフへの帰着が多項式サイズでは行えないため注意が必要である．今後の課題としては重みなしで穴の形を制限した grid graph や，unit disk graph 上の MaxHS についてどの計算量クラスになるのか解析を進め，また未解決問題として知られる平面グラフについても取り組むことが考えられる．

参考文献

[1] Yuichi Asahiro, Hiroshi Eto, Tesshu Hanaka, Guohui Lin, Eiji Miyano, and Ippei Terabaru. Complexity and approximability of the happy set problem. *Theoretical Computer Science*, 866:123–144, 2021.

[2] Yuichi Asahiro, Hiroshi Eto, Tesshu Hanaka, Guohui Lin, Eiji Miyano, and Ippei Terabaru. Parameterized algorithms for the happy set problem. *Discrete Applied Mathematics*, 304:32–44, 2021.