有向グラフによるマンハッタン積のスペクトル

理学専攻　情報科学コース　2240669　霍 知澄　(指導教員：吉田 裕亮)

1　はじめに

マンハッタン積は二部有向グラフの自然積構造で、有向パス Pn と有向サイクル Cm の積を指し、偶数の m、n における Pn と Cm ののスペクトル分析に焦点を当てる。本研究では n が無限大に近づく際の Pn と C6 有向グラフのマンハッタン積のスペクトル特性を明らかにすることを目的とする。

2　有向グラフと隣接行列

有向グラフ（directed graph）とは、$G = (V, E)$ のことで、ここで V は空でない集合であり、E は $V \times V$ の部分集合である。要素 $x \in V$ は頂点（vertex）と呼ばれ、$e = (x, y) \in E$ は初期頂点 x から終端頂点 y へのアークと呼ばれる。この場合、単に $x \to y$ と書くことがある。有向グラフ $G = (V, E)$ の隣接行列（adjacency matrix）は、$V \times V$ のインデックスセットを持つ行列 A で定義される：

$$(A)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \to y, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

3　マンハッタン積モデルと Chebyshev polynomials

m が無限大に近づく際のスペクトルを解明するためには、尾畑の $P_n\#P_2$ や岡崎の $P_n\#C_4$ の研究結果を基に、$P_{2n}\#C_6$ スペクトルの厳密解を求める必要がある。最初の列は第一種モニック Chebyshev polynomials、再

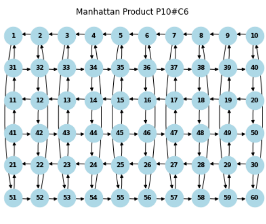

図 1: $P_n\#C_6$ モデル

帰関係によって多項式列 $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を定義する：

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \text{for } n \geq 1, \\ T_0(x) = 2, T_1(x) &= x. \end{aligned} \tag{1}$$

第二の列は第二種 Chebyshev polynomials。三項間の再帰関係によって多項式列 $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ が定義されます：

$$\begin{aligned} U_{n+1}(x) &= xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad \text{for } n \geq 1, \\ U_0(x) = 1, U_1(x) &= x. \end{aligned} \tag{2}$$

多項式列 $T_n(x)$ と $U_n(x)$ はモニックのためにスケールされた Chebyshev polynomials である。したがって、$|x| < 2$ のとき $x = 2\cos\theta$ にスケールすることにより、以下の関係が得られる。

$$T_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta, \quad (n \geq 0) \tag{3}$$

$$U_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad (n \geq 0) \tag{4}$$

命題 3.1

(i) 多項式 $t_n(x)$ は区間 $-2 < x < 2$ に n 個の解を持ち、

$$x_k = 2\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

これらの解は互いに区別される。(5)

(ii) 多項式 $u_n(x)$ は区間 $-2 < x < 2$ に n 個の解を持ち、

$$x_k = 2\cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right), \quad k = 0, 2, \ldots, n-1,$$

これらの解は互いに区別される。(6)

4　隣接行列の特性多項式

4.1　$\mathrm{P}_{2n}\#C_6$ の隣接行列

マンハッタン積グラフ $\mathrm{P}_{2n}\#C_6$ の隣接行列 A_n は、図 2 で表される。

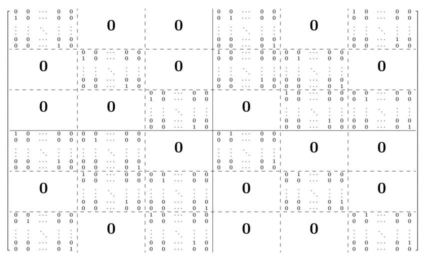

図 2: 隣接行列 A_n

4.2　$\mathrm{P}_{2n}\#C_6$ の特性多項式

特性多項式 $P_n(x)$ は、次のように定義される：

$$P_n(x) = \det(xI - A_n) \tag{7}$$

ここで、行列 A_n の特性多項式を計算するために、Chebyshev 多項式 $U_n(x)$ と $T_n(x)$ が用いられる。

特性多項式は次の形式を持つ：

$$P_n(x) = x^{6n-1}U_n(x)\{U_{n+1}(x^2+1)\}^2T_{n+1}(x) \quad (8)$$

証明の概略を以下に記述するまず、$t = x^2+1$ と置き、関数 U_n が t の形で表される：

$$U_n(x^2+1) = U_n(t) \quad (9)$$

$U_n(t)$ を計算する、:

$$(U_n(t))^2 = t^2(U_{n-1}(t))^2 - 2tU_{n-1}(t)U_{n-2}(t) + (U_{n-2}(t))^2 \quad (10)$$

$R_n(x)$ を次のように置く:

$$R_n(x) = (U_n(x^2+1))^2 \quad (11)$$

次の漸化式が得られる：

$$R_n(x) = (2x^2+x^4)R_{n-1}(x) - (2x^2+x^4)R_{n-2}(x) + R_{n-3}(x) \quad (12)$$

$M_n = U_n(x)T_{n+1}(x)$ とおくと、$M_n(x)$ は次の漸化式を満たす：

$$M_n(x) = (x^2-2)\cdot M_{n-1}(x) - M_{n-2}(x) \quad (13)$$

$M_n(x)\cdot R_n(x)$ が $Q_n(x)$ とおくと、(11) と (13) を用いて $Q_n(x)$ が以下の漸化式を満たすことが分かる。

$$\begin{aligned} Q_n(x) = {} & (-4x^8+x^{12})\cdot Q_{n-1}(x) - \\ & 2(2x^{14}-x^{16}+x^{18}+x^{20})\cdot Q_{n-2}(x) \\ & + (-2x^{18}+9x^{20}-14x^{22}-3x^{24}+2x^{26}+x^{28})\cdot Q_{n-3}(x) \\ & - 2(2x^{26}-x^{28}+x^{30}+x^{32})\cdot Q_{n-4}(x) \\ & - (4x^{32}+x^{36})\cdot Q_{n-5}(x) \\ & - x^{36}\cdot Q_{n-6}(x) \end{aligned} \quad (14)$$

5 $P_{2n}\#C_6$ の隣接行列

次に、$4n\times 4n$ 行列 $(xI-A)$ に対して Schur の公式を繰り返し用いて、次の関係式が得られる：

$$\det(xI-A) = x^{4n}E_n(x) \quad (n \geq 3)$$

ただし $E_n(x)$ は以下の行列 $E_n(x)$ はの固有方程式である.

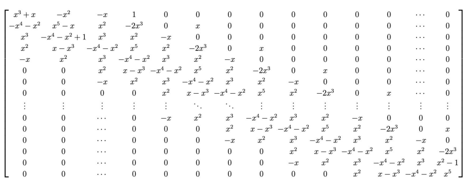

図 3: E_n

ここで $g_n(x) = \det(xI-A)$ とおくと、$g_n(x)$ が以下の漸化式を満たす.

$$\begin{aligned} g_n(x) = {} & (-4x^8+x^{12})\cdot g_{n-1}(x) - 2(2x^{14}-x^{16}+x^{18}+x^{20})\cdot g_{n-2}(x) \\ & + (-2x^{18}+9x^{20}-14x^{22}-3x^{24}+2x^{26}+x^{28})\cdot g_{n-3}(x) \\ & - 2(2x^{26}-x^{28}+x^{30}+x^{32})\cdot g_{n-4}(x) \\ & - (4x^{32}+x^{36})\cdot g_{n-5}(x) - x^{36}\cdot g_{n-6}(x) \end{aligned} \quad (15)$$

よって $g_n(x) = Q_n(x)$、初期値も同じであることがわかった．よって，定理は示された.

6 マンハッタン積グラフ $\mathrm{P}_{2n}\#C_6$ のスペクトル

$\mathrm{P}_{2n}\#C_6$ のスペクトルをは $P_n(x)$ の解から得られる。$p_n(x)$ の因数である (11)$R_n(x)$ と (13) の $M_n(x)$ の解を調べる。命題 3.1 より命題 3.1 より、$M_n(x)$ の解の集合は以下である。

$$E_1 = \left\{\theta = \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad k = 1,2,\ldots,n\right\} \quad (16)$$

集合 E_1 は重複を含めて 2n 個の解を含む。$R_n(x)$ の解の集合は以下である。

$$E_2 = \{\pm\sqrt{2\cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right) - 1} : k = 0,2,...,n-1\} \quad (17)$$

多項式 $R_n(x)$ の次数は $2n$ であるため、集合 E_2 は重複を含めて 4n 個の解を含む。重複する解は、0 の値であり、これは $k/(n+1) = 1/3$ の場合に現れる。

$k/(n+1) > 1/3$ の場合、$\pm\sqrt{2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)-1}$ の値が純虚数になること。また，$P_n(x)$ の因数である x^{6n-1} を考慮に含めると，0 の固有値が少なくとも $6n-1$ 個存在 することがわかる.

7 まとめ

この研究は、マンハッタン積を用いた $P_{2n}\#C_6$ グラフのスペクトル特性を明らかにすることを目的としています。C_6 のスペクトル特性を理解し、n に対する予測する手がかりを得ることができる。

参考文献

[Comellas 08] F. Comellas, C. Dalfó, M.A. Fiol, and M. Mitjana, The spectra of Manhattan street networks, Linear Algebra and its Applications, Vol. 429, pp. 1823–1839, 2008.

[Obata 12] Nobuaki Obata, Spectra of Manhattan Products of Directed Paths $P_n\#P_2$, Interdisciplinary Information Sciences, Vol. 18, No. 1, pp. 43–54, 2012.

[Kang 14] Yuanbao Kang and Caishi Wang, Asymptotic spectral distributions of Manhattan products of $C_n\#P_m$, Quantum Inf Process, Vol. 13, pp. 2499–2511, 2014.

[岡崎 21] 岡崎詩歌, 振動子集団における同期条件とマンハッタン積モデル, 修士論文, お茶の水女子大学, 2021 年.