

# イジングマシンを利用したパターン形成

理学専攻・情報科学コース 2040657 向井 かのん

## 1 はじめに

イジングマシンは巡回セールスマン問題などの組合せ最適化問題の求解に特化したマシンだが、本研究ではイジングマシンの新たな利用方法として、強磁性イジングモデルの磁区パターンの時間発展を計算する手法を提案する。これによりイジングマシンの新たな価値を示し、その利用方法がさらに広がることを目指す。磁性体のパターン形成は十分に研究されているため、それらの結果と本研究の結果を定量的に比較することでイジングマシンが時間発展問題に応用可能であることを示す。

## 2 イジングマシンによる時間発展の計算

### 2.1 強磁性体を表すモデル

強磁性体は統計力学においてイジングモデルで表され、ハミルトニアンは以下ようになる。

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} JS_i S_j \quad (1)$$

$\langle i,j \rangle$  は隣り合うスピン間についてのみ相互作用の和をとることを意味する。  $J > 0$  はスピン間の相互作用の大きさであり、  $S_i = \pm 1$  はスピンの値を表す。

### 2.2 イジングマシンでダイナミクスを計算できる根拠

図1に示すように、今回扱うダイナミクスを表した時間発展の方程式を離散化すると差分方程式が得られる。一方、仮想的に設定した自由エネルギーを最小化することでも同じ差分方程式が得られる。この自由エネルギーを離散化するとイジングモデルとなるため、時間発展方程式を解くことは各時刻でイジングモデルを最適化することと同値であると言える [1]。



図1: 時間発展方程式とイジングモデルの関係。

## 3 強磁性相互作用

### 3.1 問題設定

本章では隣接するスピン間の強磁性相互作用を考慮したモデルを急冷したときのダイナミクスを観察する。非保存系（系に含まれるスピンの値の合計が一定でない）は Glauber dynamics に従うことが知られており、このときドメインサイズが時間  $t$  について  $t^{1/2}$  に比例して成長する [2]。ここで、ドメインとは磁区パターンの同じ値のスピン同士がかたまってきた塊のことである。通常これはモンテカルロ法でシミュレーションされるため、その結果と定量的に比較する。

### 3.2 モデルと方法

以下にモデルを示す。

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^k S_j^k - \sum_i h_i^k S_i^k \quad (2)$$
$$h_i^k = K S_i^{k-1} + \eta_i^k$$

ここで、  $J = D/(\Delta x)^2$ 、  $K = 1/\Delta t$  で、  $k$  は時間ステップ、  $\eta_i^k$  はノイズを表す。  $\Delta x$  は隣接スピン間距離、  $\Delta t$  は時間間隔である。  $\mathcal{H}$  の右辺第1項が強磁性相互作用を表し、第2項は局所磁場を表す。

初期状態はランダムに  $S_i^0 = \pm 1$  に設定し、  $\mathcal{H}$  の係数を各時刻で算出してイジングマシンで最適化することで磁区パターンのシミュレーションを行う。

### 3.3 結果

図2に得られた磁区パターンのスナップショットを示す。提案手法によってモンテカルロ法と類似したパター

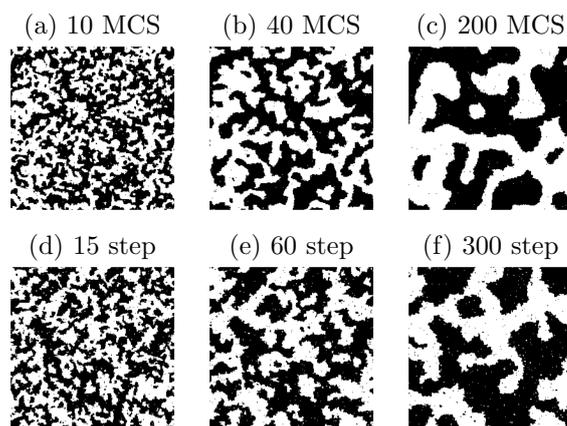


図2: スナップショット。(a)~(c) はモンテカルロ法、(d)~(f) はアニーリング法によるもの。数字は時間ステップ数を表す。MCS: モンテカルロステップ。

ンが得られている。また、ドメインサイズに対して動的臨界指数を以下のように定義し、Glauber dynamics に従うことを確認する。

$$1/z(t) = \log(L(t')/L(t))/\log(t'/t), \quad t' = 1.2t \quad (3)$$

図3にそのグラフを示す。ドメインサイズ  $L$  が大きくなるにつれ両手法の動的臨界指数が  $1/2$  に近づくことがわかる。これらにより、イジングマシンでこのダイナミクスを再現できていると言える。

## 4 双極子相互作用

### 4.1 問題設定

本章では第3章のモデルに双極子相互作用を加えてシミュレーションする。初期状態で外部磁場を  $h_{\max} > 0$  に設定し、時間ステップごとに一定の速さ  $v$  で0になるまで下げて得られる磁区パターンを観察する。2次元において双極子相互作用は反発力に対応し、この影

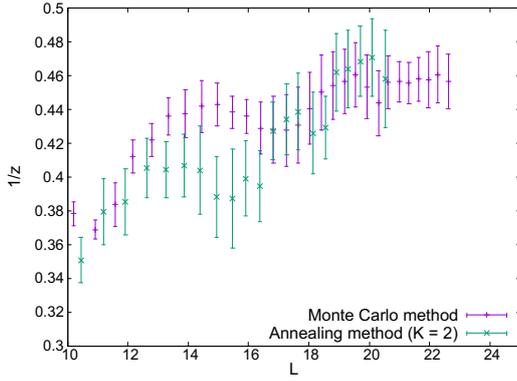


図 3: 動的臨界指数のグラフ。横軸がドメインサイズ  $L$ , 縦軸が動的臨界指数  $1/z$  を表す。

響で一定の幅を持ったドメインが成長する。図 4 は先行研究 [3] で得られた磁区パターンで,  $v$  が大きいと海島構造になり, 小さいと迷路構造になる。これをイ

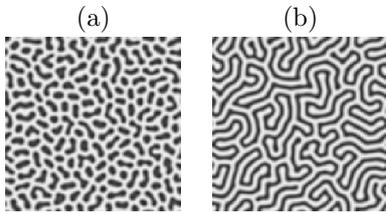


図 4: 先行研究 [3] で得られた磁区パターン。(a) 素早く外部磁場を下げたときの海島構造。(b) ゆっくり外部磁場を下げたときの迷路構造。

ジングマシンを用いて再現する。

#### 4.2 モデルと方法

第 3 章のモデルを変更し, 以下のモデルを使用する。

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^k S_j^k - \sum_i h_i^k S_i^k + \gamma \sum_{i,j} S_i^k S_j^k G(i,j)$$

$$h_i^k = K S_i^{k-1} + \eta_i^k + h(t^k), \quad h(t) = h_{\max} - vt$$

$$G(i,j) = 1/d_{ij}^3 \quad (4)$$

$h(t^k)$  が時間ステップごとに変化する外部磁場を表す。第 3 項の  $\gamma > 0$  は双極子相互作用の強さを表す。 $d_{ij}$  はスピン  $i, j$  間の距離を表す。

初期状態は全てのスピンを上向きに設定する。 $\mathcal{H}$  の係数を各時刻で計算し, イジングマシンを用いて最適化する。磁場の値が 0 になったら, パターンを安定させるために磁場ゼロの状態でも数回最適化を繰り返して終了する。

#### 4.3 結果

シミュレートド・アニーリング法により得られた結果を示す。図 5 は  $v = 2.0, 0.01$  で得られたスナップショットである。外部磁場を速く下げると小さなドメインが大量に生成され, ゆっくり下げると大きなドメインが少数生成されている。また, 図 6 はドメイン面積と個数のヒストグラムである。右が  $v = 2.0$ , 左

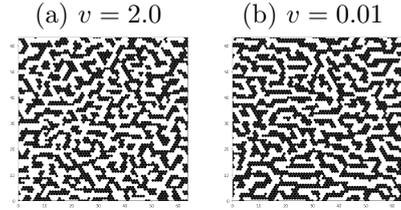


図 5: 磁区パターンのスナップショット。

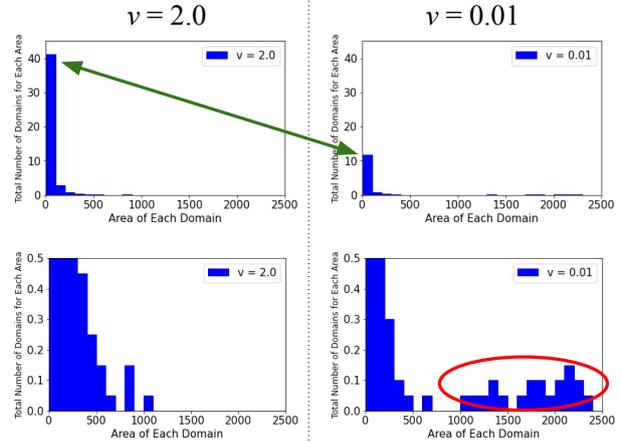


図 6: ドメイン面積のヒストグラム。横軸がドメイン面積, 縦軸がその面積を持つドメインの数を表す。

が  $v = 0.01$  の結果である。上段の緑の矢印部分に着目すると,  $v = 2.0$  のときは面積  $0 - 100$  の小さいドメインが大量に生成されているのに対し,  $v = 0.01$  では小さいドメインは少数であることがわかる。また下段のは縦軸の表示範囲を狭めたもので, 赤丸部分に注目すると  $v = 2.0$  では一つも生成されていない大きなドメインが  $v = 0.01$  では生成されていることがわかる。これらの結果は海島構造と迷路構造の特徴の違いに対応していると言える。

## 5 まとめ

磁性体のパターン形成において, 強磁性相互作用および双極子相互作用を考慮したモデルを使用し, イジングマシンを利用してシミュレーションしたところ, 先行研究と定量的に類似した結果を得ることができた。これらから, イジングマシンで時間発展を計算することが可能であると示すことができ, 今後イジングマシンは組合せ最適化だけでなく, イジングモデル関係のその他の時間発展の問題に応用されることが期待できる。

## 参考文献

- [1] K. Mukai and K. Kudo, Pattern Formation Simulated by an Ising Machine, J. Phys. Soc. Jpn. **90**, 025004 (2021).
- [2] Gary S. Grest and David J. Srolovitz, Structure and evolution of quenched Ising clusters, Phys. Rev. B. **30**, 5150 (1984).
- [3] K. Kudo, M. Mino and K. Nakamura, Magnetic Domain Patterns Depending on the Sweeping Rate of Magnetic Fields, J. Phys. Soc. Jpn. **76**, 013002 (2007).