

# 振動子集団における作用の同期条件

理学専攻・情報科学コース 岡崎 詩歌

## 1 はじめに

同期とは、個々に固有の振動数を有する振動子集団内の振動子が互いに作用を及ぼしあい、最終的には全ての振動子の振動の周期が一致する現象である。しかし同期は常に起こるのではなく、振動子の振動の周期にいつまでもばらつきが見られることもある。本研究では同期条件の本質を見極め、実際に Manhattan 積 [1] の振動子集団モデルについて、その本質と同期条件を考究する。

## 2 有向グラフと隣接行列

$V$  を頂点の集合、 $E$  を辺の集合とすると、グラフは  $G = (V, E)$  と表される。ここでは  $V$  は有限であるとする。2つの頂点  $x, y \in V$  ( $x \neq y$ ) において、 $(x, y) \in E$  かつ  $(y, x) \notin E$  である時、 $x$  から  $y$  へ向きのある辺 (矢印) を引き、 $x \rightarrow y$  と記述する。有向グラフとは、全ての辺が向きを持つグラフのことである。

また、隣接行列とは、有限グラフを表す正方行列のことであり、隣接行列  $A = [A_{xy}]_{x, y \in V}$  は以下で定義される。

$$A_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{if } x \rightarrow y, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

## 3 使用するモデル

本研究では頂点の集合を振動子集団と思い、振動子  $x$  から振動子  $y$  に作用を及ぼしている場合は  $x$  から  $y$  へ向きのある辺 (矢印) を引き、 $x \rightarrow y$  と記述することで、作用を及ぼしあう振動子集団を有向グラフで表現する。なお、各振動子間に働く作用の大きさは全て等しいとする。以後、この有向グラフを振動子集団のモデルとする。

また、振動子集団の数理モデルとして、蔵本モデルを使用する。蔵本モデルは以下の式で表される。

$$\frac{d}{dt} \phi_k = \omega_k - c \sum_{j \in V} A_{kj} \sin(\phi_k - \phi_j)$$

$$\frac{d}{dt} \omega_k = -s \sum_{j \in V} A_{kj} \sin(\phi_k - \phi_j)$$

蔵本モデルは不均一な固有振動数を持つ位相振動子集団のモデルであり、 $V$  は振動子集団、 $\phi$  と  $\omega$  は振動子の位相と角振動数をそれぞれ表している。 $s$  と  $c$  は各振動子間の結合強度、 $A$  は振動子集団のモデルの隣接行列を表している。

## 4 シミュレーション結果

蔵本モデルを利用して、次の2つの振動子集団のモデルにおいてシミュレーションを行った。これらのモデルをそれぞれモデル1、モデル2とする。

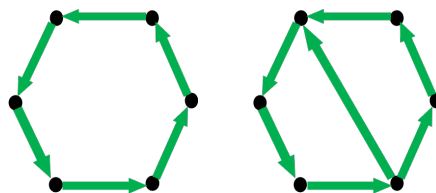


図1: 各振動子集団のモデル。(左図) モデル1。(右図) モデル2。

この2つのモデルにおいて、6個の振動子の初期振動数を0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6に設定した。また、全ての振動子の初期位相を0,  $s = c = 1.5$ と設定した。

図2は各モデルの全振動子の振動数の時系列を示している。どちらのモデルも振動子数や初期設定は同じであるが、モデル1では同期が起らず、モデル2では同期が起きていることが読み取れる。この結果より、振動子集団のモデルの隣接行列  $A$  が同期条件の本質であることがわかる。

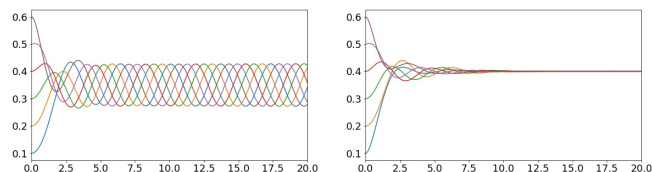


図2: 各モデルの時系列。(左図) モデル1。(右図) モデル2。縦軸は  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ )、横軸は時間

## 5 Manhattan 積のモデルとスペクトル

同期条件の本質が振動子集団のモデルの隣接行列であることから、同期条件を求めるためには、モデルの隣接行列の固有値 (スペクトル) を調べる必要がある。そこで、ある種の Manhattan 積モデルについて、そのスペクトルの厳密解を求め、同期条件を調べたいと考えた。

Manhattan 積とは2つの2部グラフを組み合わせたグラフ積であり、スペクトルの一般式が知られているモデルに、図3がある。

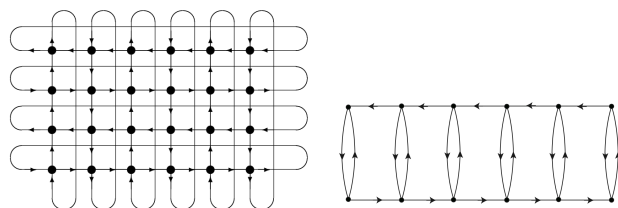


図3: Manhattan 積のモデルの例。

スペクトルの厳密解が知られていない Manhattan 積の 1 つに、振動子が 4 行  $n$  列の格子状に並んだ以下のモデル (図 4) がある。本研究ではこのモデルについて、スペクトルの厳密解と漸近分布を定めた。このモデルをモデル 3 とする。

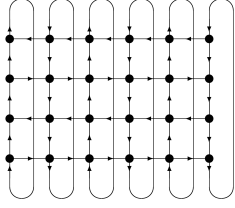


図 4: モデル 3

モデル 3 のスペクトルの厳密解を求めるため、次の定理を示す。

**定理:** モデル 3 の固有方程式は次で与えられる。

$$\det(x\mathbf{1} - A) = x^{2(n-1)} \cdot u_{n+1}(x) \cdot v_{n+1}(x) \quad (1)$$

ただし、 $A$  はモデル 3 の隣接行列であり、 $u_n(x)$  と  $v_n(x)$  はそれぞれ以下の漸化式を満たす。

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= xu_n(x) - u_{n-1} \\ (u_0(x) &= 1, u_1(x) = x, n \geq 1) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x) &= xv_n(x) + v_{n-1} \\ (v_0(x) &= 1, v_1(x) = x, n \geq 1) \end{aligned} \quad (3)$$

定理の証明の概略を以下に記述する。

まず、 $Q_n(x) = u_{n+1}(x)v_{n+1}(x)$  とおくと、(2) と (3) を用いて  $Q_n(x)$  は次の漸化式を満たすことがわかる。

$$Q_n(x) = x^2 Q_{n-1}(x) - 2Q_{n-2}(x) - x^2 Q_{n-3}(x) - Q_{n-4}(x)$$

次に、 $4n \times 4n$  行列  $(x\mathbf{1} - A)$  に対して Schur の公式を繰り返し用いて、次の関係式が得られる。

$$\det(x\mathbf{1} - A) = x^n \cdot D_n(x) \quad (n \geq 3)$$

ただし、 $D_n(x)$  は以下の  $n \times n$  行列  $D_n$  の固有方程式である。

$$D_n = \left( \begin{array}{cccccccc} x^3 & -2x^2 & x & & & & & \\ -1 & x^3 & -2x^2 & x & & & & \\ -x & 0 & x^3 & -2x^2 & x & & & \\ -x & 0 & x^3 & -2x^2 & x & & & \\ & -x & 0 & x^3 & -2x^2 & x & & \\ & & -x & 0 & x^3 & -2x^2 & x & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -x & 0 & x^3 & -2x^2 & x \\ 0 & & & & -x & 0 & x^3 & -2x^2 & x \\ & & & & & -x & -1 & x^3 & \end{array} \right) \Bigg\} n$$

$$\text{ここで、} g_n(x) = \frac{D_n(x)}{x^{n-2}} = \frac{\det(x\mathbf{1} - A)}{x^{2(n-1)}} \text{ とおくと、}$$

$g_n(x)$  は  $Q_n(x)$  は同じ漸化式を満たし、初期値も同じであることがわかった。よって、定理は示された。

次に、モデル 3 のスペクトルの厳密解を求める。定理よりモデル 3 の固有方程式は (1) で与えられる。(1)

の因数である  $u_{n+1}(x)$  と  $v_{n+1}(x)$  において、(2) と (3) より

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= U_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right) \\ v_{n+1}(x) &= i^n U_{n+1}\left(-\frac{ix}{2}\right) \end{aligned}$$

であることがわかる。ただし、 $U_n(x)$  は Chebyshev の第 2 種多項式である。ゆえに、

$$\begin{aligned} u_{n+1}\left(2 \cos \frac{k\pi}{n+2}\right) &= 0 \\ v_{n+1}\left(i2 \cos \frac{k\pi}{n+2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

である。また、(1) の因数である  $x^{2(n-1)}$  を考慮に含めると 0 の固有値が少なくとも  $2(n-1)$  個存在することがわかる。よって、モデル 3 のスペクトルの厳密解は次で与えられる。

$$\left\{ 2 \cos \frac{k\pi}{n+2}, i2 \cos \frac{k\pi}{n+2}, ; k = 1, 2, \dots, n+1 \right\} \cup \left( \begin{array}{c} 0 \\ 2(n-1) \end{array} \right)$$

ここで、モデル 3 のスペクトル測度  $\mu$  は、

$$d\mu(x, y) = \frac{dy}{4\pi\sqrt{4-y^2}} \delta_0(x) + \frac{dx}{4\pi\sqrt{4-x^2}} \delta_0(y) + \frac{1}{2} \delta_0(x) \delta_0(y)$$

で与えられる。ただし、 $x + yi \in \mathbb{C}$  である。よって、 $n \rightarrow \infty$  とした場合、0 の固有値、0 以外の実数スペクトル、0 以外の虚数スペクトルがそれぞれ  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$  で分布することがわかる。

## 6 まとめ

本研究では同期条件の本質が振動子集団のモデルの隣接行列であることがわかった。そこで、同期条件を求めるためにはモデルのスペクトルを求める必要があると考え、実際に Manhattan 積のモデルのスペクトルの一般式を求めた。本研究で扱った計算方法を応用し、様々なモデルのスペクトルや同期条件を調べたい。

## 参考文献

- [1] Nobuaki.Obata, Manhattan Products of Diagraphs : Characteristic Polynomials and Examples, *Ann. Funct. Anal.*, **3**(2), 135-143 (2012)
- [2] Nobuaki.Obata, Spectra of Manhattan Products of Directed Paths  $P_n \# P_2$ , *Interdiscip. Inf. Sci.*, **18**(1), 43-54 (2012)
- [3] Julio Rodriguez and Max-Olivier Hongler, Networks of Self-Adaptive Dynamical Systems, *IMA J. Appl. Math.*, **79**(2), 201-240 (2014)