Ò M ² $ v • › Ë m É ¿ Ä ë ” « w 7 & Ï

g ¶ • È ~ Ø C J ¶ ¯ ” µ • < h ÿ (¦ ‹ - » • O y) õ)

1 x a Š t

\ ú $ | » $ ù É ¿ Ä ë ” « w Ï U ç ” Ó Ï | À æ ” Ï w r j ’ › ¬ R b ” T r O T x | Õ å w ú Ä ò p K ” } Y [1] p x | { ³ ï « p w 7 & Ï x À æ ” Ï U 7 & q ^ • | ! ˆ ³ ï « p w 7 & Ï x ç ” Ó Ï U 7 & q ^ • o M ” } ‡ h Y [2] p x | * q M O ¹ ” µ U 1 : t { ^ • o M ” ? º É ¿ Ä ë ” « t m M o | ? w ¨ t ‘ l o À æ ” Ï q ç ” Ó Ï w 7 & s M U ¬ R ^ • o M ” q \ , ’ • o M ” } ` T ` q O | ú í v w ¹ ” µ q ³ ï « U { ^ • o M s M Ô ù | ç ” Ó Ï q À æ ” Ï r j ’ › ” w U É ¿ Ä ë ” « q ` o 7 & T r O T t m M o x ° i Ì ’ T t s l o M s M }

f \ p Š Z € p x | ú í v É ¿ Ä ë ” « Í w ¶ o w : U ¹ ” µ t s “ ~ ” Ô ù t ¯ : › p o | 7 & s É ¿ Ä ë ” « Ï › Ì ’ T t b ” . é . $ t x ù É ¿ Ä ë ” « t S M o | f w Ï › › Ã n Z ” ¯ µ Ä : ([3]) › ; M o ¤ Ê ” Å U ¹ ” µ t s ” ~ ” Ô ù w 7 & É ¿ Ä ë ” « › { Š ” . › t 7 & Ï U | À æ ” Ï t s ” T | ç ” Ó Ï t s ” T t £ è b ” .

2 Þ Ã ç

Š Z € p x | K ” ° : w ¹ ” µ T ’ f w ¶ o w : t v . › á • Í Ó É ¿ Ä ë ” « › ß Q ” } v . › ù b ” ¤ : › Ê ” Å m(m = 0; : : : ; N 1) | ¤ • : › A • & Ï › ¤ ¿ ´ q ` | ¤ ¤ ¿ ´ x ª w Í Ó p K ” q b ” } ‡ h | Ê ” Å m q n › m s Y Í Ó w R › r_{mn} | Õ ^ › L_{mn} | v ” › J_{mn} q b ” }

¤ Ê ” Å t x Ž T ’ v Ö q v Z U K “ | I_m › Ê ” Å m T ’ w v Z q b ” ($I_m < 0$ s ’ v Ö) } v • w - T ’ |

$$\sum_n J_{mn} = I_m \qquad (1)$$

U R q b ” } ¹ ” µ q s ” : p x I = N 1 | f w w ³ ï « q s ” : p x I = 1 p K ” } ‡ h Ù ë ¶ â v › > b ” q | v ” x y —) t z « ` |

$$J_{mn} = \frac{D_{mn}}{L_{mn}}(P_m \quad P_n) \qquad (2)$$

U R q b ” } \ \ p D_{mn} x r_{mn} w 4 Ð t z « ` | ¤ ¿ ´ mn w ; ‹ Q w G V ^ q b ” }

Í w ‘ O s ¯ µ Ä : › ‹ Ö b ” }

$$\begin{aligned} H &= E + V \\ &= \sum_{m;n>m} \frac{L_{mn}\hat{J}^2_{mn}}{r^4_{mn}} + \sum_{m;n>m} L_{mn} r_{mn} \end{aligned} \qquad (3)$$

E x ¤ É ç ª ” „ ³ p p v . › v b h Š t ž A s ¯ µ Ä | V x É ¿ Ä ë ” « › ¡ Ë b ” ¯ µ Ä p K “ | Ê ” Å q Ê ” Å › m s Y Í Ó w . u U X s • y s ” „ r G V X s ” } x Y w î : p K “ V w E t 0 b ” O ˆ › > b ” : } = 1 ; 2 w Ì | V q x f • g • | ¯ Ø u | . u t 0 b ” } ‡ h |

$$\hat{J}_{mn} = \frac{\sum_{k2K} J^{2\,(k)}_{mn}}{\frac{1}{N}}$$

q ` | $J^{(k)}_{mn}$ x Ê ” Å k U ¹ ” µ w Ì w Ê ” Å m T ’ Ê ” Å n • w v ” | K x ¹ ” µ t s “ ~ ” Ê ” Å w B ù q b ” (K = f0; : : : ; N 1g) } Ü (3) ‘ “ C 2 M Ü › { Š | r_{mn} = 0 › r X q | 7 & s ^

$$r_{mn} = \frac{4}{\quad}\hat{J}^2_{mn}{}^{\frac{1}{+4}} \qquad (4)$$

U { ‡ ” } Ü (4) › Ü (3) t E Ö b ” q

$$H = \frac{4}{\quad}{}^{\frac{4}{4+}} \quad \frac{}{4}{}^{\frac{4}{4+}} + \frac{4}{\quad}{}^{\frac{!}{4+}} \sum_{m;n>m} L_{mn}\hat{J}^{\frac{2}{4+}}_{mn} \qquad (5)$$

q M O | r_{mn} = r_{mn} t S Z ” ¯ µ Ä : H U { ‡ ” } 7 ‘ s É ¿ Ä ë ” « Ï t 0 ` o $J^{(k)}_{mn}$ › { Š | Ü (5) ‘ “ ¯ µ Ä w G V ^ › Ð , | f w ¯ µ Ä U 7 ‹ ÿ M ‹ w › 7 & É ¿ Ä ë ” « q b ” }

3 : ‹ - ‰ A L

3.1 Š Z € p – ; b ” É ¿ Ä ë ” «

Š Z € p x 3 ¨ w É ¿ Ä ë ” « › – ; ` h ( $ 1) } Þ Ã ç (A) x Ë s % ~ ¯ Ï p K “ | % w Õ ^ › l | s % w Õ ^ › % w p K ” l q ` h } < 1 w Ì | s % ‘ “ % w M U Õ X | > 1 w Ì | % ‘ “ s % w M U Õ M Ë s % ~ ¯ q s ” } = 1 w Ì Y ~ ¯ q s ” } Þ Ã ç (B) x Í t N x (3 N) w Ê ” Å › s ´ t , h Y N ¯ Ï p K ” } Þ Ã ç (C) x 7 Ê ” Å Ï p | Y á ¯ w œ ¤ t Ê ” Å › 1 m ” ` h Ï p K ” }

\ • ’ 3 ¨ w É ¿ Ä ë ” « Þ Ã ç t 0 ` o : ‹ - ‰ › æ l h } é . $ t x | ‡ c | (i) É ¿ Ä ë ” « w ¤ ¤ ¿ ´ t & p s s 8 ‹ r_{mn} ›) Q ” } Í t (ii) Ü (1) q (2) › ¨ ¢ µ ± ¼ ç O › ; M o r X \ q p v ” J_{mn} › { Š h ™ | (iii) Ü (4) p f w v ” t 0 b ” 7 & s ^ r_{mn} › { Š ” } Ž ñ | r_{mn} U) b ” ‡ p (ii) q (iii) › “ & b }) ‹ U Á t 7 & É ¿ Ä ë ” « p K ” q 8 4 ^ • ” }

$ 1: Š Z € p – ; b ” É ¿ Ä ë ” « Þ Ã ç } (A) Ë s % ~ ¯ Ï (B) Y N ¯ Ï (C)7 Ê ” Å Ï

3.2 Ë s % ~ ¯ Ï w : ‹ - ‰

Þ Ã ç (A) t m M o : ‹ - ‰ › æ M | r w ‘ O s Ï U 7 & T t m M o U | b ” } ß Q ˜ ” Ï x | ~ %

全て繋いだループ構造，等辺のうち一辺を切断したツリー構造，底辺を切断したツリー構造の全部で 3 種類である．

数値計算の結果は図 2 のようになった．縦軸はコスト関数 H にある μ，横軸は二等辺三角形の底辺の長さに対する等辺の長さ β である．実線は $\beta > 1$ の時は二等辺三角形の等辺のうち一辺を切断したツリー構造とループ構造，$\beta < 1$ の時は二等辺三角形の底辺を切断したツリー構造とループ構造のコストの大きさ H^* が同じ時の μ の値を示している．点線は $\beta = 1$ で，等辺と底辺の長さが逆転する境目を示す．実線と点線で区切られた 4 つの領域にそれぞれ示してある二等辺三角形構造は，その領域での最適構造である．μ が大きければ大きいほどループ構造が最適だということが分かる．

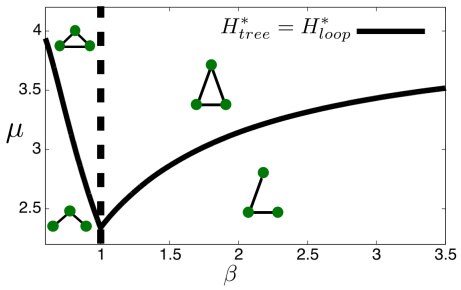


図 2: パラメータ μ　β 空間における二等辺三角形構造の最適構造

3.3　正 N 角形構造の数値計算

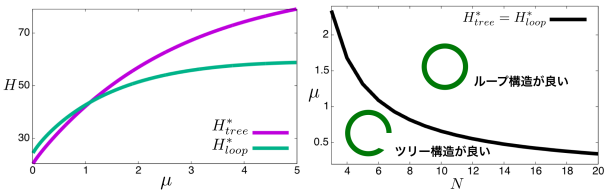
モデル (B) について数値計算を行い，どのような構造が最適かについて検討する．計算を簡単にするため，最も近い隣合うノード同士のみを直線で繋ぐ場合を考える．したがって考え得る構造は，正 N 角形の一辺を切断したツリー構造と全てのエッジを結んだ正 N 角形のループ構造の 2 つである．

数値計算の結果は図 3 のようになった．図 3a は縦軸がコストの大きさ H^*，横軸がコスト関数 H にある μ である．紫の実線はツリー構造のコストの大きさを示し，緑の実線はループ構造のコストの大きさを示している．図 3b は縦軸がコスト関数 H にある μ，横軸が何角形か決める N である．実線は正 N 角形構造のツリー構造とループ構造のコストの大きさ H^* が同じ時の μ の値を示している．実線で区切られた 2 つの領域にそれぞれ示してある構造は，その領域での最適構造である．μ が大きければ大きいほど，ノード数 N が大きいほどループ構造が最適だということが分かる．

3.4　7 ノード構造の数値計算

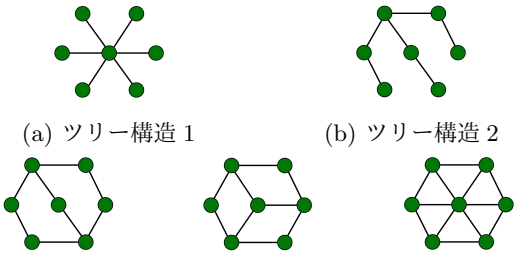
モデル (C) について数値計算を行い，どのような構造が最適かについて検討する．7 ノード構造はエッジが 12 本あり，エッジの繋ぎ方は 2^{12} 通り存在する．このため全構造に対してコストの大きさ H^* を調べるのは困難なので，最適構造になるのではないかと考え得る構造を 5 つに絞った (図 4)．

数値計算の結果は図 5 のようになった．縦軸がコストの大きさ H^*，横軸がコスト関数 H にある μ である．5 本の実線はそれぞれの構造のコストの大きさ H^* を



(a) 2 種類の正六角形構造における H^* の μ 依存性　(b) パラメータ $\mu - N$ 空間における正 N 角形の最適構造

図 3: 正 N 角形構造に対する数値計算結果



(a) ツリー構造 1　(b) ツリー構造 2

(c) ループ構造 1　(d) ループ構造 2　(e) ループ構造 3

図 4: 考え得る 7 ノード構造

示している．全体的に μ が大きくなるにつれてエッジを多く繋いだ構造，すなわちループ構造が最適になることが分かった．

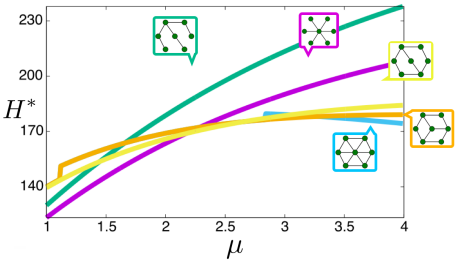


図 5: 5 種類の 7 ノード構造における H^* の μ 依存性

4　まとめと今後の課題

先行研究では固定ソース，固定シンク，変動シンクそれぞれの場合でツリー構造とループ構造どちらが最適かどうかについて調べられた．そこで本研究ではソースが可変な場合について調べたところ，構造は α には依存しないが，μ によって最適構造がループ構造とツリー構造に異なることが分かった．今後は数値計算を用いて他のネットワーク構造についてや，現存する様々なネットワークに適応するコスト関数も検討していきたい．

参考文献

[1] Dan Hu and David Cai. Adaptation and optimization of biological transport networks. *Physical review letters*, Vol. 111, No. 13, p. 138701, 2013.

[2] Eleni Katifori, Gergely J Szollosi, and Marcelo O Magnasco. Damage and uctuations induce loops in optimal transport networks. *Physical Review Letters*, Vol. 104, No. 4, p. 048704, 2010.

[3] 中西智美．ロバストな輸送ネットワークの自己組織化モデル．修士論文，お茶の水女子大学，2018.