

打楽器の数理モデル：モード間相互作用の音色に対する効果

鳥山早紀 (指導教員：郡宏)

1 はじめに

楽器は、楽器本体を何らかの力によって振動させることで音を出している。管楽器なら息を吹き込むことで、弦楽器なら弦を擦ることで、鍵盤楽器なら鍵盤を叩くことで、打楽器なら楽器本体または張られている皮などを叩くことで振動させ音を鳴らしている。その中でも特に、打楽器の一種であるシンバルやゴングといった金属で出来た楽器は、叩いてから時間が経つにつれ音の鳴り方が変化する。それは、時間とともに高周波成分にエネルギーが輸送されているためである。これを単純なモデルで再現し、エネルギー輸送の原理を理解するとともに音の人工的合成の手法の提案を目指す。よりリアルなシンバルやゴングの音の再現が可能になるかもしれない。

2 モデル

以下の振動系モデルを考える。

$$\ddot{x}_k = -\gamma_k \dot{x}_k - (2\pi f_k)^2(x_k + ax_k^2 + bx_k^3) + K(2\pi f_0)^2 N(X - x_k) \quad (1)$$

ここで、 x_k はモード k の振動振幅 ($k = 1, 2, \dots, N$)、 t は時間 [s]、 γ_k は減衰率 [1/s]、 f_k は振動数 [Hz]、 a, b は各モードの非調和性を表すパラメータ、 X は平均場 $X = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$ 、 K はモード間の結合強度を表すパラメータ、 $(2\pi f_0)^2$ は典型的な結合強度を与える量であり、ここでは $f_0 = 100$ [Hz] としておく。音圧は $X(t)$ によって与えられるとする。

初期条件は、単一のモード、あるいは複数のモードの x_k を非 0 とし、残りはすべて 0 とする。 v_k はすべて 0 とする。

3 モード数が音色に与える効果

モード数 N を変化させ、振動数の時間変化に対する効果を調べる。単純のためパラメータ $a = b = 0$ 、減衰率 $\gamma_1 = 1$ 、結合強度 $K = 1$ としシミュレーションを行っていく。

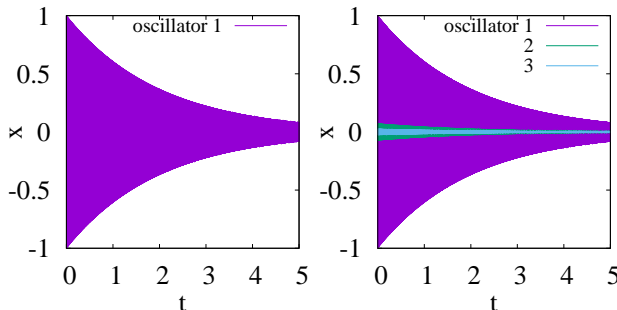


図 1: $N = 1$ でのシミュレーション結果 (左図) と $N = 3$ でのシミュレーション結果 (右図)。

図 1(左) は $N = 1$ 、図 1(右) は $N = 3$ としたときのシミュレーション結果である。モード数 1 のときの初期条件は $x_1 = 1, f_1 = 300$ [Hz]、モード数 3 のとき

の初期条件は $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, f_1 = 300$ [Hz], $f_2 = 600$ [Hz], $f_3 = 900$ [Hz] で与えた。減衰の様子に大きな変化はないが、図 1(右) は高いモードが加わったこともあり、音色にもわずかに高い音が混じり一緒に減衰していることが聞き取れる。このことはモデルの式から明らかである。

4 相互間結合強度の効果

結合強度 K について考察を行う。 $a = b = 0, \gamma = 1, N = 10, f = 40 - 2000$ [Hz] の初期条件のもと、 K の値を変えていく。初期振幅は $x_1 = 1.0$ にのみ値を与え、それ以外は 0 とする。各モードの x の値の変化をより見易くするために、 x の極大値のみを表示させたシミュレーション結果を図 2 に示す。 $K = 1$ のときのシミュレーション結果は図 2(左) の通りである。さらに K の値を与えていく。 $K = 5, K = 8$ のときのシミュレーション結果はそれぞれ図 2(真ん中)、図 2(右) である。 K の値が高くなればなるほど音色は高くなる。結合強度が強まることで振動数の高い振動モードが強く励起されているためだと考えられる。

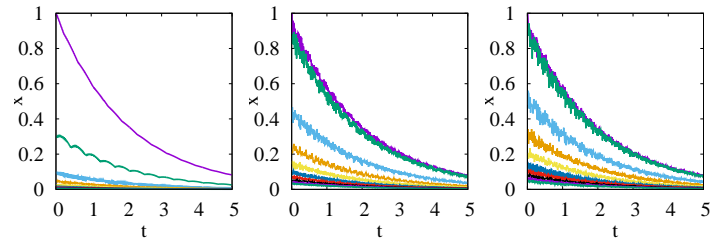


図 2: $K = 1$ でのシミュレーション結果 (左図) と $K = 5$ でのシミュレーション結果 (中図) と $K = 8$ でのシミュレーション結果 (右図)。

5 パラメータの効果

モード数を 1 として、 a と b の音色に対する効果、振動数の時間変化に対する効果を調べる。初期条件 $x_1 = 1, f_1 = 300$ [Hz]、減衰率 $\gamma_1 = 1$ 、結合強度 $K = 1$ とし、 $a = b = 0$ のときと a, b に値を与えたときと比較していく。まず a について考察する。 $a = 0.1, b = 0.0$ と値を与えると、シミュレーション結果は x の帯域がわずかに負の値にずれ込む。同様に $a = -0.1, b = 0.0$ と値を与えると、こちらは x の負の帯域が -1 を超えていない結果になっていることがわかる。このことから、 a は x の値の非対称性をもたらす役割を持っていると予想できる。音色への影響はほぼない。

b についても値を与えていく。モード数を 1、 $K = 1, x_1 = 1, f_1 = 300$ [Hz]、 $\gamma_1 = 1$ とし、 $a = b = 0$ のときと比較する。 $a = 0.0, b = 0.5$ とすると、シミュレーション結果は x の幅が膨らむ、すなわち減衰が遅くなる結果が得られる。グラフ上ではわずかな変化しか見受けられないのに対し、音色には大きな変化が感じられる。高い音から一瞬低い音が現れたりする。スペクトルも一度下がったスペクトルが再度一瞬上昇した

り、興味深い動きを見せる。同様に $a = 0.0, b = -0.5$ としてシミュレーションを行うと、今度は先ほどとは反対に低い音から高い音へ移っていく。以上のことから、 b は音色に変化をもたらす役割を持っていることがわかる。

6 リアルな音の再現

以上の各パラメータの考察を考慮して、より実際の楽器に近い音色の再現を目指す。様々な初期条件でシミュレーションを行った中で特に興味深かったものを紹介していく。図3(左)は $K = 8, N = 10, f = 40\,2000[\text{Hz}], x_1 = 1.0, x_2, \dots, x_{10} = 0.0, a = 0, b = 0$ としたときの結果、図3(右)は同様の条件で $b = -1.0$ としたときの結果である。 b のみを変えたためグラフに大きな変化は見られないが、音色はわずかに高い音が現れ、実際のシンバルの音に近いような音の変化が現れている。

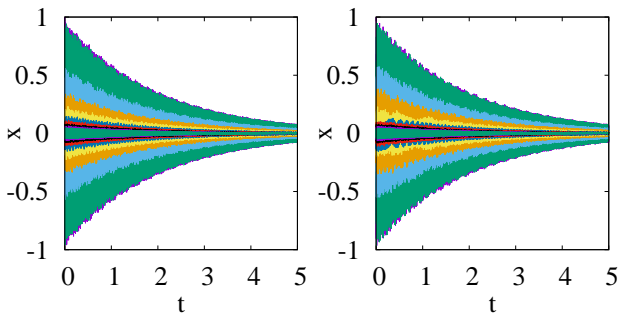


図3: x_1 にのみ初期振幅1を与えた $b = 0$ でのシミュレーション結果(左図)と $b = -1.0$ でのシミュレーション結果(右図)。

次に x に初期値を与えるモードを変えていく。図4(左)は $K = 8, N = 10, f = 40\,2000[\text{Hz}], x_5 = 1.0, x_1, \dots, x_4, x_6, \dots, x_{10} = 0.0, a = 0, b = 0$ としたときの結果、図4(右)は同様の条件で $b = -1.0$ としたときの結果である。 x_1 に1を与えた時よりも音が高くなるのはもちろんだが、 x_5 付近の振幅が面白い動きをみせる。高い振動モードになると振幅の立ち上がりがわずかに遅れていることから、実際の楽器の音の立ち上がりに近づいたといえる。

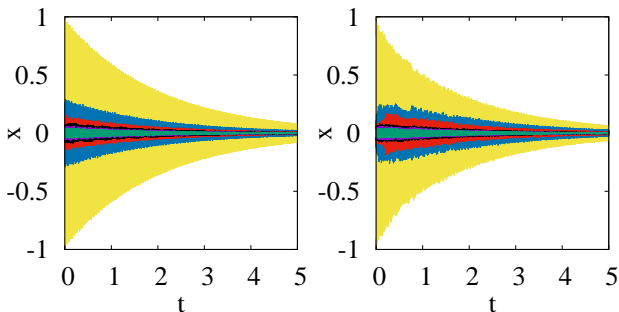


図4: x_5 にのみ初期振幅1を与えた $b = 0$ でのシミュレーション結果(左図)と $b = -1.0$ でのシミュレーション結果(右図)。

7 まとめと今後の課題

モデル式の各パラメータであるモード数 N , 結合強度 K , パラメータ a, b について様々な値を与えてシミュレーションを行うことで、それぞれの効果について考察することができた。また、これらのパラメータの特性を考慮して値を変えることでよりリアルな音の合成が可能となった。

楽器の叩き方によって最初に初期振幅が与えられるモードは変化すると推測できるので、今後は初期振幅の与え方についても考察していきたい。また、もっと明確に高いモードが次から次へと励起されるシミュレーション結果が得られればよりシンバルや銅鑼に近い音色へと近づくはずである。

8 参考文献

- [1] N.H. フレッチャー, T.D. ロッシング. 楽器の物理学, シュプリンガー・ジャパン (2002).
- [2] 中村勲, 長沼大介. 三本弦によるピアノ音の減衰特性の考察. 情報処理学会研究報告. [音楽情報科学], Vol. 2002, No. 14, pp. 7-12, 2002.
- [3] Fletcher, N. H., R. Perrin, and K. A. Legge. "Nonlinearity and chaos in acoustics." *Acoust. Aust* 18.1 (1989): 9-13.
- [4] Legge, K. A., and N. H. Fletcher. "Nonlinearity, chaos, and the sound of shallow gongs." *The Journal of the Acoustical Society of America* 86.6 (1989): 2439-2443.
- [5] Touz, Cyril, Stefan Bilbao, and Olivier Cadot. "Transition scenario to turbulence in thin vibrating plates." *Journal of Sound and Vibration* 331.2 (2012): 412-433.
- [6] Legge KA. University of New England. *Nonlinear Mode Coupling in Vibrating Mechanical Systems* (1989): 76-114.