

# defect 数揺らぎに着目した時空カオスの統計的性質の解析

杉村佳織 (指導教員：郡宏)

## 1 はじめに：心房細動と時空カオス

私たちの心臓は、普段意識していなくても自律的な、規則正しい収縮活動を繰り返している。この心臓の自律的な働きは、心臓の電氣的活動によるものである。通常、心臓はペースメーカーである洞房結節から伝わる電気信号が一定のリズムで伝わる事で、規則正しく心臓全体に血液を送り出している。しかし、何らかの理由でこの電気信号がうまく伝わらず、心房内で電氣的の渦ができる場合がある。この状態が心房細動である。心房細動自体は致命的な病ではないが、心房細動がおこることで、脳梗塞などの他の症状を誘発する危険性が高まる。拍動は常に規則的であることが望まれるが、心房細動には未解明なことも多く、その治療法の多くは経験論に頼っている。

心房細動の状態と類似したダイナミクスは、化学反応系の数理モデルでも見ることができる。本研究では、心房細動のダイナミクスをスパイラルが自発的に生成、消滅を繰り返す時空カオス状態だと想定し、化学反応系モデルのうち、Bär モデルと CGLE を用いて、このようなダイナミクスを示す系の統計的性質を解析した。

## 2 興奮子モデル：Bär モデル

興奮子モデルとは、ある閾値を超えた入力があったときに、一過性の興奮を示すモデルのことである。そのモデルのひとつ Bär モデルは以下の通りである [1]。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon}u(u-1)\left(u - \frac{v+b}{a}\right) + \nabla^2 u, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(u) - v, \quad (1b)$$

$$f(u) = \begin{cases} 0 & (u < \frac{1}{3}) \\ 1 - 6.75u(u-1)^2 & (\frac{1}{3} \leq u \leq 1) \\ 1 & (u > 1) \end{cases} \quad (1c)$$

Bär モデルでは一様定常解が常に線形安定である。しかし、パラメータ  $b, \epsilon$  を変えることで系の挙動は変化し、時空カオスがおきるパラメータでは、長時間の時空カオス (下図 b) の後、系は最終的にスパイラルのない定常状態 (下図 c) に陥る。

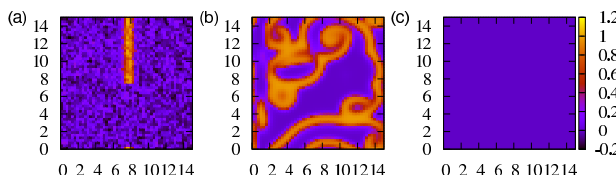


図 1: 時空カオスの時間発展: オレンジ色の領域と青色の領域はそれぞれ、興奮波、定常状態に対応する。領域の半分の長さを持つ波が成長し (初期条件のみ一様ランダムノイズを領域全体に加えている)、時空カオス状態となり、最終的にスパイラルが消滅することで、一様定常状態に陥る。

## 3 振動子モデル：CGLE モデル

振動子モデルとは、興奮状態が一定の周期で繰り返されるモデルのことである。そのモデルのひとつ複素 Ginzburg-Landau 方程式 (CGLE) モデルは以下で定められる [2]。

$$\frac{\partial W}{\partial t} = W + (1 + ib)\nabla^2 W - (1 + ic)|W|^2 W. \quad (2)$$

CGLE でも Bär モデル同様、パラメータを適切に選ぶことで時空カオス状態を作り出すことができる。一般解は  $\nabla^2 W = 0$  と置くことにより、 $W = \exp(-ict)$ 、つまり一様振動解であることがわかる。この解が安定なとき、系の時間発展は長時間の時空カオス状態の後、振動状態となる。

## 4 時空カオスの特徴量：defect

本研究で注目している時空カオスは、複数のスパイラルが生成、消滅を繰り返す状態である。そこで、このスパイラルの中心部 defect に着目し、解析を行った。defect の判定は以下の topological charge を用いる。

$$\frac{1}{2\pi} \oint \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = C(\mathbf{r}). \quad (3)$$

局所位相  $\phi$  は、Bär モデルの場合  $\tan \phi = (u - u_0)/(v - v_0)$  で、CGLE では  $\phi = \arg W$  で定められる。(ここで  $(u_0, v_0)$  は孤立したユニットにおける不安定固定点。) また、積分経路は格子を囲む 4 直線とした。  $C = 1$  は反時計回りの defect を、  $-1$  は時計回りの defect を、それ以外の値は defect でないと判定する。defect は、系内をランダムに動き回り、時間と共に回転の向きが異なる defect 同士で対消滅、対生成する。境界条件によっては、defect が境界に吸引され消滅するときもある。

## 5 Bär モデルにおける lifetime とシステムサイズの関係

時空カオスはモデルの式中のパラメータを適切に選ぶことで、その状態を過渡的なものにすることができる。一度カオス状態がおさまると、静止状態となると、このようなパラメータのモデルでは再び興奮することは無い。このように、スパイラルカオスが始まってから、系が静止状態に陥るまでの時間を以降 lifetime と呼ぶ。先行研究において、スパイラルカオスがおきている系での lifetime とシステムサイズ (領域の面積) の関係性が指数関数的であることが数値的に知られている [3]。

ここで、この関係性を理論的に示すことを目的とし、まずは Bär モデルを用いて defect 統計量をはかった。領域内に存在する defect 数は、時間と共に確率的に変動する。一様定常状態に陥る前に、defect 数は必ず 0 個になるため、lifetime は defect 数が 0 個となる確率の逆数に比例すると予想される。これは実際、シミュレーションデータからも確認できた。

さらに、defect 数分布は図 2 の通りシステムサイズを大きくするにつれ、分布は正規分布に近づく。

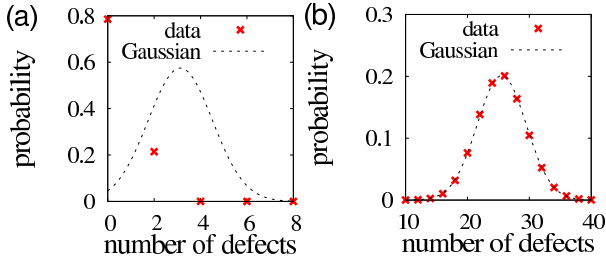


図 2: Bär モデルでの defect 数の分布。(a) システムサイズ  $N = 21 \times 21$ 。(b)  $N = 60 \times 60$ 。赤印はシミュレーションデータで黒の破線は平均  $\mu = 0.00709365N$ 、分散  $\sigma^2 = 0.00437218N$  の正規分布である。

この結果は中心極限定理により理解することができる。よって、defect 数が 0 個になる確率値は正規分布の確率密度分布から求めることができ、正規分布の確率密度関数は、

$$p(m) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4)$$

で与えられ ( $m$ : defect 数,  $\delta = 1$  (ノイマン境界条件),  $\delta = 2$  (周期境界条件)), ここにシステムサイズを  $N$ , 平均と分散をそれぞれ  $\mu = \alpha N, \sigma^2 = \beta N$  とし代入すると、

$$p(m) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi\beta N}} \exp\left(-\frac{(m-\alpha N)^2}{2\beta N}\right) \quad (5)$$

と与えることができる。ここで  $m = 0$  を代入し、その逆数をとることで、lifetime  $\tau$  の理論曲線を求める。

$$\tau \sim \exp\left(\frac{\alpha^2}{2\beta} N\right). \quad (6)$$

数値計算から得られたシステムサイズに対する lifetime の図に、この曲線を重ねてみると、これらは同じ傾きをもち、確かに各システムサイズにおける lifetime を予測する理論曲線となる。これより、lifetime のシステムサイズに対する指数関数的増加の関係性が明らかとなり、さらに小さなシステムサイズから求められる defect 平均数と分散の値から、大きなシステムサイズで系が一樣静止状態に陥るまでにかかる時間をみつけることが可能となった。

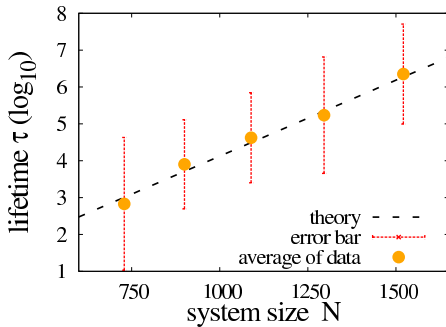


図 3: Bär モデルの各システムサイズにおける lifetime の常用対数値。オレンジの丸は異なるノイズ値の初期条件から始めた 200 個のシミュレーションデータ点、赤線はエラーバー  $[\tau - \sigma/\sqrt{200}, \tau + \sigma/\sqrt{200}]$ 、黒の破線は理論曲線 (6) 式である。

## 6 defect 遷移率の関数形

defect 数が時刻  $t$  に  $m$  個存在したとき、時刻  $t + dt$  に  $m + 2$  個に増加する確率を  $\Gamma_+(m)$ 、defect 数が時刻  $t$  に系内に  $m$  個存在したとき、時刻  $t + dt$  に系内に  $m - 2$  個に対消滅する確率を  $\Gamma_-(m)$  と定める。これら defect 数  $m$  に関する対生成、対消滅の関数形はこれまでの先行研究では対生成の遷移率が定数の関数、対消滅の遷移率が defect 数の 2 乗の関数であるという報告が多かった [4]。しかし、実際には、システムサイズが大きくなるにつれ、対生成率と対消滅率の割合  $\Gamma_+(m-2)/\Gamma_-(m)$  が defect 数についてのマスター方程式から導かれる指数関数の式に近づくことが確認された。

## 7 CGLE における lifetime とシステムサイズの関係

CGLE モデルの場合、lifetime とシステムサイズの関係は、指数関数的であるときと、そうでないときがある。これは、パラメータにより変化する。関係が指数関数的でないパラメータ領域では、システムサイズを大きくすると、系は時空カオスの永続する状態か、defect は存在しないが周期解におちない不安定な状態となる。このため lifetime はあるシステムサイズで発散する。本研究では、線形安定性解析からこの臨界システムサイズを求めた。

周期解に摂動を加えたものを、CGLE の式に代入すると、波数  $k$  についての分散関係式を求めることができる。この関係式をもとに安定性を調べ、変数を波数からシステムサイズに置き換えることで lifetime が発散する臨界システムサイズを求めることができる。実際、これはシミュレーション結果の臨界システムサイズに一致する。

## 8 まとめ

本研究では、心房細動と似たふるまいをする数理モデルを用いることで、時空カオス状態の統計的性質を解析した。解析手段として defect 統計量をはかり、この結果から lifetime とシステムサイズの関係が指数関数的であることを示す理論曲線と、遷移率の割合を表す式を導き出した。この結果は、中心極限定理より解釈することができ、このことから結果がモデルに依存しないことが期待できる。

また、lifetime とシステムサイズの関係が指数関数的でないパラメータ領域において、lifetime が発散する臨界システムサイズを線形安定性解析から求めた。

## 参考文献

- [1] M. Bär and M. Eiswirth, Phys. Rev. E **48**, R1635 (1993).
- [2] I. S. Aranson and L. Kramer, Rev. Mod. Phys. **74**, 99 (2002).
- [3] Z. Qu, Am J Physiol Heart Circ Physiol **290**, H255 (2006).
- [4] L. Gil, J. Lega, and J. L. Meunier, Phys. Rev. A **41**, 1138 (1990).