近傍層意味論を用いた様相論理の諸体系の一般化

理学専攻 情報科学コース 山本華子　(指導教員：戸次大介)

本論文では、近傍層意味論 (Neighborhood-sheaf semantics[Kishida 2011]、以下 NSS) を用いて一階述語条件論理の意味論を与え、体系 VC^+ [Priest 2008] の意味論を定義した。近傍意味論は、ある世界に "近い" 世界の集合が複数個存在することを許すため一般性が高い。一方条件論理のクリプキ意味論は、ある世界からの到達可能性が論理式ごとに異なるクリプキフレームを用いる。近傍意味論の上記の特徴から、この特殊なクリプキフレームを表すことができると考えた。

1　様相論理と条件論理

1.1　様相論理とは

様相論理は必然性や蓋然性を扱う論理であり、様相記号が導入される；$\Box\varphi$： necessarily φ

様相論理の意味論として用いられるのが可能世界意味論である。命題論理の部分に対する意味論は意味論間で共通であり、様相記号の解釈のみが異なる。

定義 命題論理の可能世界意味論は、モデル $(X, [\![\cdot]\!])$ を用いて定義される。X は可能世界の集合、$[\![\cdot]\!]$ は解釈である。任意の論理式 φ に対し、$[\![\varphi]\!] \subseteq X$ となる。n 項演算子 $\otimes$ の解釈は、$[\![\otimes(\varphi_1, ...\varphi_n)]\!] = [\![\otimes]\!]([\![\varphi_1]\!], ...[\![\varphi_n]\!])$。真理関数の解釈は、集合の演算となる；$[\![\wedge]\!] = \cap$、$[\![\vee]\!] = \cup$、$[\![\neg]\!] = X\backslash -$。推論の妥当性は、シーケントの妥当性を保つこととして定義される。　様相記号の解釈は、各意味論で次のように定義される。

- クリプキ意味論では、到達可能関係 $R_X \subseteq X \times X$ を用いて $[\![\Box]\!]$ が $w \in [\![\Box]\!](A) \Leftrightarrow R_X wu$ を満たす全ての $u \in X$ について $u \in A$ と定義される。(X, R_X) をクリプキフレームという。
- 近傍意味論では $[\![\Box]\!] = \mathbf{int}$ が、近傍関数 $\mathcal{N}_X : X \to \mathcal{PP}X$ により $w \in \mathbf{int}(A) \Leftrightarrow A \in \mathcal{N}_X(w)$ と定義される。$(X, \mathcal{N}_X)$ を近傍フレームという。

1.2　条件論理

様相論理の一種である条件論理では、古典論理では表せない暗黙の前提を扱うことができる。つまり、前提部分の暗黙の了解を含む節 (ceteris paribus clause) を考慮することで自然言語において不自然な推論を排除することができ、[Priest 2008] の例のように、条件文の分析に有用であると考えられている。条件論理の体系としてまず C が提案され ([Chellas 1980])、様々な拡張の体系が考案されている。

条件論理では、条件記号 $>$ が導入される。意味論はクリプキフレーム $(X, \{R_{X,A} : A \in \mathcal{F}\})$ によって定まる。$N^w_{X,A} = \{x \in X : R_{X,A}wx\}$ とすると、$A > B$ の真理条件は次のように定義される。

$$w \in [\![A > B]\!] \Leftrightarrow N^w_{X,A} \subseteq [\![B]\!]$$

C^+ は次のような条件が追加された体系である。

1. $N^w_{X,A} \subseteq [\![A]\!]$
2. $w \in [\![A]\!]$ ならば $w \in N^w_{X,A}$

さらに [Priest 2008] では、条件論理の体系が、C の一階述語の体系 CC から VC^+ まで拡張されている。CC、CC^+ は領域を固定した一階述語条件論理である。VC、VC^+ は、CC、CC^+ を、領域を可能世界に対し可変にすることによって拡張した体系である。可変領域のために存在述語 $\mathfrak{E}$ が導入される。「a が存在する」を $\mathfrak{E}a$ と表し、量化記号の解釈は $[\![\mathfrak{E}]\!]$ の範囲内で行う。本論文では以下のように、存在述語と可変領域を考慮した一階述語条件論理の統語論を考える。

$$\mathcal{F} ::= p \mid \neg\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \vee \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \to \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{F}$$
$$\mid \Box\mathcal{F} \mid \Diamond\mathcal{F} \mid \mathcal{F} > \mathcal{F} \mid \forall x\mathcal{F} \mid \exists x\mathcal{F} \mid \mathfrak{E}$$
$$\tau ::= c \mid x$$

2　近傍層意味論 (NSS)

2.1　バンドル解釈

クリプキ意味論、近傍意味論に対応する一階述語様相論理の意味論は、クリプキ層意味論、近傍層意味論である。近傍層意味論はクリプキ層意味論の一般化だが、この一般化関係は命題論理におけるクリプキ意味論と近傍意味論の一般化関係が基となっている。[Kishida 2011] これらの意味論を定義するには、まず一階述語論理の部分に対する共通の可能世界意味論を与え（バンドル解釈)、様相記号の解釈を意味論ごとに与える。

バンドル解釈は、一階述語論理の解釈における領域を可能世界の集合上の層として捉えたものであり、スライス圏 $\mathbf{Sets}/X$ を用いて定義される。X は可能世界の集合である。領域 D は、全射 $\pi : D \to X \in ob(\mathbf{Sets}/X)$ に対し、各 $w \in X$ 上のファイバー $D_w = \pi^{-1}[\{w\}]$ 用いて $D = \Sigma_{w\in X} D_w$ と表される。バンドル解釈は、世界を一つに固定すると通常の一階述語論理となる。直積、演算子なども同様に、次のように定義される。

- D の n 個の直積は、$D^n = \Sigma_{w\in X} D^n_w$
  (D の、X 上の n 個の fibered product)
- 演算子 $f \in mor(\mathbf{Sets}/X)$ は、
  $f = \Sigma_{w\in X} f_w$ ($f_w : D_w \to E_w$)
- 構造 $\mathfrak{M}$、解釈 $[\![\cdot]\!]$ は、
  $\mathfrak{M} = \Sigma_{w\in X}\mathfrak{M}_w$、$[\![\cdot]\!] = \Sigma_{w\in X}[\![\cdot]\!]_w$

バンドル解釈はモデル $(\mathfrak{M}, [\![\cdot]\!])$ によって定まる。

$$\text{構造}\,\mathfrak{M}\begin{cases}\text{全射 } \pi : D \to X \\ F^{\mathfrak{M}} \subseteq D^n \ (F \text{ は } n \text{ 項述語}) \\ \mathbf{Sets}/X \text{ の射 } f^{\mathfrak{M}} : D^n \to D (f \text{ は } n \text{ 項の関数}) \\ \mathbf{Sets}/X \text{ の射 } c^{\mathfrak{M}} : D^0 (= X) \to D \ (c \text{ は定数})\end{cases}$$

$$\text{解釈}\,[\![\cdot]\!]\begin{cases} n \text{ 項述語 } F : [\![\bar{x}|F\bar{x}]\!] = F^{\mathfrak{M}} \ (\bar{x} \in D^n) \\ n \text{ 項演算子：} [\![\otimes(\varphi_1, ...\varphi_n)]\!] = [\![\otimes]\!]([\![\varphi_1]\!], ...[\![\varphi_n]\!]) \\ \text{真理関数：} [\![\wedge]\!] = \cap、[\![\vee]\!] = \cup、[\![\neg]\!] = D^n\backslash - \\ \text{量化記号：} [\![\bar{x}|\exists y\varphi]\!] = p^{n+1}_n[[\![\bar{x}, y|\varphi]\!]] \\ \quad (\ p_n : D^{n+1} \to D^n :: (a_1, \ldots, a_n, b) \mapsto \bar{a}\ )\end{cases}$$

妥当性は、D^n 上で前述と同様に定義される。

2.2 NSS

クリプキ層意味論、NSS は、バンドル解釈に次のような条件を追加することで得られる；まず、$\mathbf{Sets}/X$ を、それぞれより制限されたスライス圏に置き換える。これに伴い、モデルの構成要素に条件が加わる。次にそれぞれに様相記号の解釈 $[\![\Box]\!]$ を定義する。解釈のために、異なる世界の間で同一視できるオブジェクト同士の関係、貫世界同一性を定める。

クリプキ層意味論は、$\mathbf{Sets}/X$ の代わりに、クリプキフレーム (X, R_X) 上のクリプキ層のスライス圏 $\mathbf{Krsh}/(X, R_X)$ を考える。モデルにおける対象、射はすべてクリプキ層となる。

定義 クリプキフレーム (X, R_X)、(D, R_D) に対し、p-モルフィズム $\pi : D \to X$ とは、$R_X\pi(a)w$ のとき、R_Dab かつ $w = \pi(b)$ を満たすような $b \in D$ が存在するような単調写像である。クリプキ層 $\pi : D \to X$ とは、上の定義の $b \in D$ が唯一つに決まるような p-モルフィズムである。

$[\![\Box]\!]$ は D^n 上で定められるが、D^n 上の到達可能関係 R_{D^n} は R_D を用いて定まる；

$R_{D^n}(\bar{a}, \bar{b}) \Leftrightarrow$ すべての $i \leq n$ に対し $R_Da_ib_i$

NSS は、$\mathbf{Sets}/X$ の代わりに、様相論理の規則 $\mathbf{M}$、$\mathbf{C}$ を満たす MC 近傍フレーム $(X, \mathcal{N}_X)$ 上の近傍層のスライス圏 $\mathbf{LI}/X$ を考える；

$$\frac{\varphi \vdash \psi}{\Box\varphi \vdash \Box\psi} \qquad \mathbf{M}$$

$$\Box\varphi \land \Box\psi \vdash \Box(\varphi \land \psi) \qquad \mathbf{C}$$

モデルにおける対象、射はすべて近傍層となる。

定義 MC近傍フレーム X、D に対し写像 $\pi : D \to X$ が局所同型のとき、(D, π) を X 上の近傍層という。つまり、$\mathcal{N}_D(a) \neq \emptyset$ となる $a \in D$ に対し $\pi|_U : U \to \pi[U]$ が全単射となる $U \in \mathcal{N}_D(a)$ が存在するような開写像である。

$[\![\Box]\!]$ は D^n 上で命題論理と同様に $[\![\Box]\!] = \mathbf{int}_{D^n}$ と定義される。$\mathcal{N}_{D^n}$ は、$\mathcal{N}_D$ を用いて、開基を取ることで定義する。

MC 近傍フレームはクリプキフレームの一般化であり、近傍層はクリプキ層の一般化である。貫世界同一性についても一般化された定義であることがわかる。従って、NSS はクリプキ層意味論の一般化となる。

NSS は、一階述語論理に $\mathbf{M}$ と $\mathbf{C}$ を加えた体系 $\mathbf{FOMC}$ の意味論に対応している。クリプキ層意味論は $\mathbf{FOMC}$ を拡張した体系 $\mathbf{FOK}$ の意味論に対応している。このため、NSS は定義の自由度が高いといえる。

3 条件論理の近傍層意味論

本節では、近傍層を用いた VC^+ の意味論の定義を与え、この定義から既存のクリプキ意味論を構成できることを示す。

一階述語条件論理の意味論を与えるために、まず近傍層 $\pi : D \to X$ に次の条件 (*) を加える。

- 任意の $\bar{a} \in D^n$ $(n \in \mathbb{N})$ に対し、近傍族 $\mathcal{N}_{D^n}(\bar{a})$ の元は、高々加算個とする。
- D^n (ただし $D^0 = X$) の点における近傍に添字として付けられる論理式は、自由変数が n 個であるような論理式のみであるとする。
- 自由変項に定数が代入された式の解釈は次のように定義される；自由変項が $(\bar{x}, y)$ $(\bar{x} \in D^n)$ のみであるような論理式 A の変項 y に定数 c を代入した論理式を $A(\bar{x}, y)[c/y]$ とすると、
  $[\![\bar{x}|A(\bar{x}, y)[c/y]]\!] =$
  $\Sigma_{w \in X}\{\bar{x} \in D^n_w | (\bar{x}, c^{\mathfrak{M}}(w)) \in [\![\bar{x}|A\bar{x}]\!]\}$

定義 体系 VC^+ の NSS は、(*) 及び次を満たす近傍層 $\pi : D \to X$ 上で定義される。

- 点 $\bar{a} \in D^n$ における、自由変数 n 個の論理式 A を添字とする近傍を $N^{\bar{a}}_{D^n,A}$ とする。任意の $\bar{a} \in D^n (n \geq 1)$ 及び任意の論理式 A に対し、以下が成り立つ；
  $N^{\bar{a}}_{D^n,A} = \cup_{\bar{b} \in [\![\bar{x}|A\bar{x}]\!]} M_{\bar{b}}$ ただし $M_{\bar{b}} \in \mathcal{N}_{D^n}(\bar{a})$ 、
  $\pi^n(M_{\bar{b}}) = N^{\pi^n(\bar{a})}_{X,A\bar{b}} \in \mathcal{N}_X(\pi^n(\bar{a}))$
- $D^0 = X$ は C^+ の条件を満たす。

条件記号 $>$ の解釈は次のように定義される。

$$\bar{a} \in [\![\bar{x}|(A > B)\bar{x}]\!] \Leftrightarrow N^{\bar{a}}_{D^n,A} \subseteq [\![\bar{x}|B\bar{x}]\!]$$

この NSS からクリプキ意味論を構成するには、写像族 $\{\vec{R}_A : D^n \to \mathcal{P}D^n | A$ の自由変数は n 個 $(n \in \mathbb{N}), \bar{a} \in D^n$ に対し $\vec{R}_A(\bar{a}) = N_{D^n,A}\}_{A \in \mathcal{F}}$ を考える。このとき、$\bar{a} \in [\![\bar{x}|(A > B)\bar{x}]\!] \Leftrightarrow \vec{R}_A(\bar{a}) \subseteq [\![\bar{x}|B\bar{x}]\!]$ と定めると、$\bar{a} \in [\![\bar{x}|(A > B)\bar{x}]\!] \Leftrightarrow R_{D^n,A}\bar{a}\bar{b}$ となる任意の $\bar{b} \in D^n$ に対し $\bar{b} \in [\![\bar{x}|B\bar{x}]\!]$ である。この変換により、各 $D^n (n \in \mathbb{N})$ において、クリプキ意味論と NSS の意味論的等価性が成り立つので、クリプキ層意味論との等価性が示された。

定理 任意の VC^+ の NSS に対し、その VC^+ のクリプキ層意味論が存在する。

4 まとめと今後の課題

本論文では NSS を用いて、全ての n 項述語を領域の n 個組の集合上で解釈できるようにする等、従来の意味論に比べ自然な意味論を構成した。また、条件文の前件部の構造に、論理式の含意関係に沿った順序が入ると不自然な推論が導かれるため、そのような順序の全く入らない体系 VC^+ の意味論を定義したが、不自然な推論の出ない形で前件部の構造に言及できる可能性もあり、更なる検証が今後の課題と考えられる。

参考文献

[1] Kishida,K. (2011) Neighborhood-Sheaf Semantics for First-Order Logic, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 278, pp.129-143.

[2] Priest,G. (2008) *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press.

[3] Yamamoto, H. and Bekki, D. (2013) First-order conditional logic and neighborhood-sheaf semantics for analysis of conditional sentences, In the Proceedings of LENLS 10, JSAI International Symposia on AI 2013, pp.96-106.

[4] 山本華子 (2014) 近傍層意味論を用いた様相論理の諸体系の一般化, 修士論文, お茶の水女子大学.