可解量子スピン模型とループ代数の有限次元最高ウェイト表現

理学専攻　情報科学コース　渡邊隆子 (指導教官:萩田真理子)

1　研究背景と研究目的

日常でもよく出会う磁石には様々な数学的モデルが考えられている。可解量子スピン系を代表するモデルである量子 XXZ スピン鎖は、変数 q が 1 の冪根のとき、$sl(2)$ ループ代数という無限次元の非可換リー代数に関する対称性を持つ。[4] ここで変数 q は量子群の q 変数に対応し、量子 XXZ スピン鎖の R 行列は、量子群 $Uq(sl(2))$ の R 行列で与えられる。量子 XXZ スピン鎖のハミルトニアンは非常に大きな次元の縮退固有空間を持つ。これは $sl(2)$ ループ代数が無限次元リー代数であるためと思われる。一般に非常に巨大な行列の固有値は、計算機で数値計算でもするより求めようがないが、今の場合は「量子群の表現論」と呼ばれる理論が背後にあるため、固有値や固有ベクトルが式できっちり書き表すことが出来る。「代数的ベーテ仮設法」と呼ばれる方法である。しかし、この方法からは固有値の縮退度までは記述出来ない。従って、縮退次元を知るためには別の方法を考える必要が出て来た。量子 XXZ スピン鎖の $sl(2)$ ループ代数に関する対称性により、このモデルのハミルトニアンの固有値の縮退度は、$sl(2)$ ループ代数の適当な有限次元表現の次元あるいは、その和に等しい [2]。各有限次元表現は、適当な有限次元最高ウェイト表現たちの直和になることが予想され [1]、従って、固有値の縮退が生じるハミルトニアンに対応する $sl(2)$ ループ代数の有限次元最高ウェイト表現の次元から分かる、と期待される。

また、対応する有限次元最高ウェイト表現は大部分が既約であるが、稀に可約なものも出現することが確かめられていた [2]。しかし、その可約表現の次元を求める一般的な方法は未だ提示されていない。(既約表現は既に分類済み [3]) そこで、各最高ウェイトに対する有限次元最高ウェイト表現を全て構成する為のアルゴリズムが考案された [1]。しかし、このアルゴリズムは、ループ代数の生成演算子に関する conjectures に基づいている、などの点で未完成であった。

本研究では、それら conjectures の検証を行い、実際に $sl(2)$ ループ代数の有限次元最高ウェイト表現を具体的に構成する研究を行った。それにより、アルゴリズムからは構成出来ない表現が出現することが確かめられ、その結果、アルゴリズムに改訂を加えた。

2　量子 XXZ スピン鎖

定義

量子 XXZ スピン鎖 とは ⇔ 可解量子スピン系を代表するモデルで、周期境界条件下でそのハミルトニアンは以下で与えられる。

$$\mathcal{H}_{XXZ} = J\sum_{j=1}^{L}(\sigma_j^X\sigma_{j+1}^X + \sigma_j^Y\sigma_{j+1}^Y + \triangle\,\sigma_j^Z\sigma_{j+1}^Z)$$

但し、変数 $\triangle$ は、異方性変数と呼ばれ、$\triangle = \frac{q+q^{-1}}{2}$ と書く。
(変数 q は量子群の q パラメータに対応する)
J は、ハイゼンベルグ結合定数とする。
また、$\sigma_k^a (a = X, Y, Z, n = j, j+1)$ は、パウリのスピン行列であり、状態空間上の作用素である。

3　$sl(2)$ ループ代数

定義

$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
とおく。
$sl(2)$ ループ代数 ($L(sl(2))$ と書く) とは ⇔ $x_n^+ = E\otimes z^n$, $x_m^- = F\otimes z^m$,$\mathrm{h}_l = H\otimes z^l$ $(n, m, l \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C})$ を生成演算子とし、交換子積 $[X,Y]$=$XY - YX (X, Y \in L(sl(2))$ に関してリー環となる代数のこと。

4　最高ウェイト表現

定義

$L(sl(2))$-加群 V の元 Ω が **最高ウェイト** $d_k(\in\mathbb{C})$ を持つ **最高ウェイトベクトル** であるとは ⇔Ω が以下を満たすこと。

$$\begin{cases} V = L(sl(2))\cdot\Omega \\ x_k^+\Omega = 0 \ \ (\forall k\in\mathbb{Z}) \\ h_k\Omega = d_k\Omega \ \ (\forall k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

定義

$sl(2)$ ループ代数の **最高ウェイト表現 (最高ウェイト加群)** とは ⇔ 表現空間が最高ウェイトベクトルにより生成される表現 (最高ウェイトベクトルを持つL(sl(2))−加群) のこと。

定義
Ω:最高ウェイトベクトル　とする。この時、
Ω に付随する **最高ウェイトパラメータ** とは ⇔ 以下の $Drinfeld-highest\quad weight\quad polynomial$ を因数分解したときに現れる数a_k たちのことで、最高ウェイトベクトル Ω に対して定まる。

$$P_\lambda = \prod_{k=1}^{s}(1-a_k u)^{m_k} a_k$$

但し、s:異なる a_k の個数、m_k:a_k の重複度　とした。

5 conjecture

$sl(2)$ **ループ代数の生成演算子に関する conjecture**

$$\begin{cases} \hat{a} = (\hat{a_1}, \cdots, \hat{a_r}) \\ m_j : \hat{a_j}\text{の重複度} \end{cases}$$ とおくと、以下が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n} k w_{j^{k+1}}(\hat{a}) w_{j^{n+1-k}}(\hat{a})\Omega = 0 \quad for \quad 0 \le n \le m_j$$

但し、

$$\begin{cases} w_{j^k} = x^-_{r-m}(\hat{a_A}) \\ \hat{a} = (\hat{a_1}, \cdots, \hat{a_r}), \\ \mathbf{A} : \hat{a}\quad \text{の部分列に対し、}\hat{a_A} = \hat{a}\backslash\mathbf{A} \end{cases}$$

6 研究結果 1

conjecture の部分的証明
本研究では、まず、この conjecture をいくつかの高次の表現に対して示した。
$sl(2)$ ループ代数の生成演算子に関するいくつかの性質 (定理等含む) を用いて、10 個までの最高ウェイトパラメータに対応する conjecture の部分的証明を行った。

7 研究結果 2

対応する表現の構成
証明を行った上記 conjecture の最高ウェイトパラメータのうちのいくつかに対応する最高ウェイト表現を構成し、そこに含まれる既約表現、及び可約表現を調べ、以下の表の結果が得られた。
(例)$\mathbf{\hat{a} = (a, a, a)}$ の場合
$U\ \Omega$：Ω によって生成された有限次元表現を表す、とする。
h_0 の固有値　$U\ \Omega$ の各 sector に対する基底の間の作用

$$\begin{array}{lllll}
3 & \Omega & & & \\
 & \updownarrow & \searrow & & \\
1 & x_0^-\Omega & w_{1^2}\Omega & \longrightarrow & w_{1^1}\Omega \\
 & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\
-1 & (x_0^-)^2\Omega & x_0^- w_{1^2}\Omega & \longrightarrow & x_0^- w_{1^1}\Omega \\
 & \updownarrow & \nearrow & & \\
-3 & (x_0^-)^3\Omega & & &
\end{array}$$

この図から、8 次元可約表現,6 次元可約表現,4 次元既約表現が存在することが分かる。
同様に図を描き、表のような結果が得られた。
但し、表中の表現の ⟨ 次元/個数 ⟩ は、本研究で構成した表現の次元と個数とした。

表 1: 最高ウェイトパラメータに対する表現の内訳

最高ウェイトパラメータ	既約表現	可約表現
$\hat{a} = (1, 1, 1)$	4/1	6/1,8/1
$\hat{a} = (1, 1, 1, 1)$	5/1	12/1,14/1
$\hat{a} = (1, 1, 1, 1, 1)$	6/1	14/1,32/1

8 まとめと今後の課題

本研究では、conjecture の部分的証明を行い、そのことにより、$sl(2)$ ループ代数の可約な有限次元最高ウェイト表現を構成するためのアルゴリズムの欠陥を見つけ、訂正を加えた。この結果は、可解模型、特に、XXZ スピン鎖の研究において、非常に重要である。今後は、$sl(2)$ ループ代数の、さらに高次元の表現を構成するために必要な基底間関係式の導出や、これまでに構成した表現と XXZ スピン鎖のハミルトニアンとの対応関係を調べ、その縮退次元をまとめたい。

参考文献

[1] T.Deguchi, Irreducibility criterion for a finite-dimensional highest weight representation of the sl(2) loop algebra and the dimensions of reducible representations, J.Stat.Mech. (2007) P05007

[2] Deguchi T., Regular XXZ Bethe states at roots of unity as highest weight vectors of the sl_2 loop algebra, J. Phys. A: Math. Theor. Vol. 40 (2007) pp. 7473–7508

[3] Chari V, Integrable representations of affine Lie algebras, 1986 Invent. Math.85 pp. 317

[4] T.Deguchi,K.Fabricius,and B.M.McCoy J.Stat.Phys.102(2001).701