

曲線上電荷分布の形状同定

沼上 利子 (指導教員: 金子 晃)

1 はじめに

曲線状の電荷分布が空間に定める静電ポテンシャルの観測から曲線の形状を、第一種 Fredholm 型積分方程式を解くことで数値的に再構成する。本研究では、電荷が等密度に分布した曲線状の誘電体の形を推測する問題を取り上げ、数値実験を行う。

2 逆問題とは

ある数学的モデル K が設定されたとき、与えられた原因から結果を決定する問題を“順問題 (direct problem)”と呼び、逆に、与えられた結果から原因を推定する問題、また、原因と結果からモデルを推定する問題を“逆問題 (inverse problem)”と呼ぶ。

input	process	output
x	$\rightarrow K$	$\rightarrow y$
cause	model	effect

3 逆問題の非適切性

逆問題を解く際に、しばしば問題となるのが適切性 (well-posedness) である。一般に、解の存在、解の一意性 (解がただ一つだけであること)、解の安定性 (データへの連続依存) の条件を満たしている順問題 $x \mapsto y = Kx$ があるとき、Hadamard の意味で“適切 (well-posed)”であるという。これに対し、逆の対応 $y \mapsto x = K^{-1}y$ は必ずしも解けず、一意でなく、また連続でない。つまり、順問題は Hadamard の意味で“適切”なのに対し、逆問題は、しばしば、“非適切 (ill-posed)”な問題となる。非適切性が逆問題の計算を困難にしている。

上記の三つの性質のうち、安定性が特に重要である。観測または数値計算には誤差が避けられないので、安定性がいえなければ、一般にそれから計算された解は真の解と全く関係ないものになり、解に関する付加的な情報が得られなければ、そのような問題を解決することはできない。ゆえに、逆問題では解析手法の工夫が順問題に比べて格段に重要となってくる。逆問題では解の存在を仮定した上で、一意性や、安定性、さらには再構成の問題を考察するのが、一般的である。

特に、逆問題の重要な例として、第一種積分方程式 $Kx = y$ を解く問題がしばしば現れる。

4 第一種積分方程式

Fredholm 型の積分方程式の最も標準的なものには、以下のような第一種積分方程式 (4.1) と第二種積分方程式 (4.2) がある。以下、第一種 Fredholm 型積分方程式を IFK とする。

$$g(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy, \quad (4.1)$$

$$f(x) = g(x) + \gamma \int_a^b K(x, y) f(y) dy. \quad (4.2)$$

核である関数 $K(x, y)$ と関数 $g(x)$ は既知であり、 γ は与えられた定数パラメータである。

5 離散化と数値解法

非適切な問題の近似解を得る手法として離散化がある。IFK(4.1) に対する離散化数値解法を考える。点 x_i で、

$$g(x_i) = \int_a^b K(x_i, y) f(y) dy \quad (5.1)$$

となる。これを離散化する。分点を N とし、 w を数値積分法の重みとすると、

$$g(x_i) = \sum_{j=1}^N K(x_i, y_j) \omega_j f(y_j) h. \quad (5.2)$$

これは、行列で表された方程式となる。

$$\mathbf{g} = \mathbf{K}\mathbf{f} \quad (5.3)$$

\mathbf{K} が逆行列を持つとき、 \mathbf{f} を得ることができる:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{g} \quad (5.4)$$

分点数 N が比較的小さいとき、 \mathbf{K}^{-1} が数値計算に堪える。これが離散化による正則化である。

6 正則化と数値解法

非適切な問題の近似解を得る手法として最もよく使われるのが Tikhonov 正則化法であり、逆問題における誤差の拡大を防ぐため、 K^{-1} の代わりに、 $(K + \gamma I)^{-1}$ を計算する。これはまた、次のような汎関数の最小化問題としても定式化できる:

$$\mathcal{F}(f, \gamma) = \int_a^b dx \left[\tilde{g}(x) - \int_a^b K(x, y) f(y) dy \right]^2 + \gamma \int_a^b |f(y) - f_0(y)|^2 dy$$

ここで、 f_0 は先見的知識に基づく f の推定値である。この汎関数の第一項は f が真の解に近いほど小さくなる。しかし、逆は必ずしも成り立たない。平滑化のため、 K が滑らかだと、 f が真の解からかけはなれていても、この項が小さくなり得る。このとき、一般に第二項が大きくなるので、この項を追加することでそれを防いでいる。しかし、 γ が大きすぎると、 f のノルムが小さいことだけが優先されるので、滑らかになりすぎて、真の解から離れすぎてしまう。実用的には最適な γ の選択が重要な問題となる。

7 曲線弧上電分布の形状同定

図のように、 xy -平面に電荷が等密度に分布した誘電体の弦があり、それはカーテンで隠されていて分からないものとする。簡単のため、この弦の形は1変数関数 $y = f(x)$ のグラフで表現できるものとする。この弦の電荷密度 (electric charge) を ρ とすれば、それが地点 (ξ, η, ζ) に定める静電ポテンシャル g は、以下の式で表される。

$$g(\xi, \eta, \zeta) = \int_L \frac{\rho ds}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \quad (7.1)$$

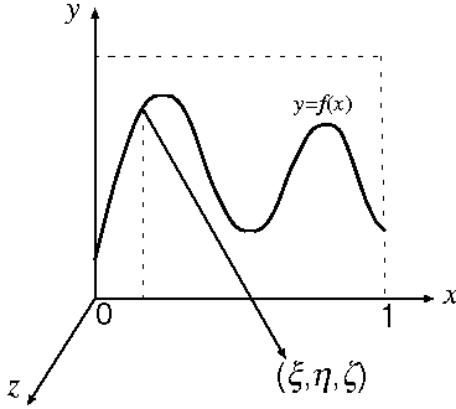
以下 g の観測から $f(x)$ を再構成する問題を考える。簡単のために、 $\rho = 1$ とする。また、 $y = f(x)$ より、 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ となるので、式 (4.1) は、

$$g(\xi, \eta, \zeta) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2} dx}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (f(x) - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \quad (7.2)$$

と表せる。本研究では g を、 $0 \leq \xi \leq 1, \eta = 0, \zeta = 1$ において観測するものとする。このとき、

$$g(\xi, 0, 1) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2} dx}{\sqrt{(x - \xi)^2 + f(x)^2 + 1}} \quad (7.3)$$

が既知函数となる。



8 Newton 法による定式化

式 (7.3) は、積分方程式であるが、未知函数 f について非線型なので、反復法で解くことを考える。 f の初期推測 (initial guess) として、指定された両端点を通る適当な曲線 $f_0(x)$ を取り、以下 $f_n(x)$ から $f_{n+1}(x)$ への更新には、Newton 法を用いる。まず、汎函数

$$F[f] = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + f'(t)^2}}{\sqrt{(x - t)^2 + f(t)^2 + 1}} dt \quad (8.1)$$

の Fréchet 微分を計算する。

$$DF(f)[h] = - \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\sqrt{1 + f'(t)^2}}{\sqrt{(x - t)^2 + f(t)^2 + 1}} \frac{f'(t)}{1 + f'(t)^2} \right)' + \frac{\sqrt{1 + f'(t)^2}}{\sqrt{(x - t)^2 + f(t)^2 + 1}} \frac{f(t)}{(x - t)^2 + f(t)^2 + 1} \right\} h(t) dt \quad (8.2)$$

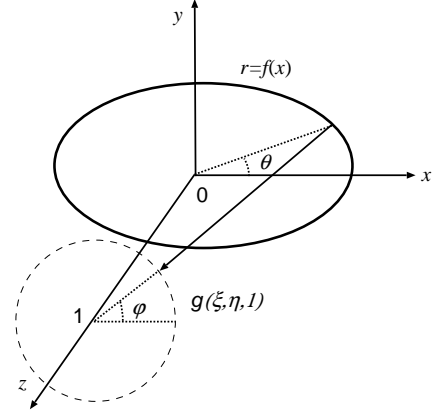
これを使って、 $F[f] - g = 0$ を解く。Newton 法の反復の式は

$$f_{n+1} = f_n - DF(f_n)^{-1} [F[f_n] - g] \quad (8.3)$$

となる。これを台形公式により N 点で離散化したものを、適当な回数まで反復し、収束の様子を調べた。また、Newton 法を緩和するため、緩和パラメータを導入した。緩和パラメータを ω とすると反復の式は、以下ようになる。

$$f_n = f_{n-1} - (1 - \omega) A(f_{n-1}) [F f_{n-1} - g] \quad (8.4)$$

9 閉曲線上電分布の形状同定



次に、星型閉曲線の場合を考える。

$$g(\xi, \eta, \zeta) = \int_L \frac{\rho ds}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \quad (9.1)$$

簡単のために、 $\rho = 1$ とする。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = 1$ より、 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$ となり、これを、 $\xi = \cos \varphi, \eta = \sin \varphi, \zeta = 1$ の条件で観測する。

$$\begin{aligned} g(\xi, \eta, 1) &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}{\sqrt{(r \cos \theta - \cos \varphi)^2 + (r \sin \theta - \sin \varphi)^2 + 1}} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2 \theta^2}}{\sqrt{(f(\theta) \cos \theta - \cos \varphi)^2 + (f(\theta) \sin \theta - \sin \varphi)^2 + 1}} \end{aligned} \quad (9.2)$$

と、表せる。

先ほどと同様に Newton 法による定式化を行う。現在考えているのは曲線なので、 $\delta f(0)$ と $\delta f(1)$ の項は打ち消し合い、こうして得られた δh の線型作用素が Fréchet 微分 DF である。この先の手順は前章と同じである。

10 実装結果と今後の課題

以上の実装を行った結果、曲線弧では、未知関数や初期値によってうまくいくものとうまくいかないものがあった。閉曲線上では、円、楕円ではうまく値が得られた。

以上の実験は 1 次元ものばかりであったが、現在、2 次元の実装を行っている。今後、2 次元の場合、差分法の他にも有限要素法を使った実装を試みたい。

参考文献

- [1] Wing, G. Milton, "A primer on integral equations of the first kind : the problem of deconvolution and unfolding", Society for Industrial and Applied Mathematics, 1991.
- [2] Hendry, W. L, "A Volterra integral equation of the first kind", J. Math. Anal. Appl. , 54(1976), pp. 266-278.