フラクタル図形による正方形二面体の展開図とタイル張りの関係

根岸　伸江　(指導教官：竹尾　富貴子)

1　はじめに

同じ図形を平行移動して平面上に並べて重なりもなく平面をうめることができるとき，タイル張りという．タイル張りについては，大きさの異なる 2 種類の長方形によるタイル張り，フラクタル図形によるタイル張りなどいろいろな研究がなされている．

また，最近では多面体の展開図の決定問題 [2] が研究されているが，[5] ではこの問題にタイル張りの理論を適用して，正方形二面体の展開図になるタイル張りの条件を求める研究がなされている．

そこで本研究では，[5] で求められた正方形二面体の展開図になる条件に新たな場合を追加し条件を求めた．さらに，ある正方形二面体の展開図の像もまた展開図になる条件についても調べた．

2　タイル張り

2×2 の整数行列 M と $D = \{\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{m-1} \mid m = |\mathrm{det} M|, \mathbf{d}_j \in \mathbb{Z}^2\}$ に対して，

$$A = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} M^{-j} \mathbf{d}_{i_j} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{d}_{i_j} \in D \right\} \quad (2.1)$$

$$W = \left\{ \sum_{j=0}^{k} M^{j} \mathbf{d}_{i_j} \in \mathbb{Z}^2 \mid \mathbf{d}_{i_j} \in D, k \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.2)$$

と定義する．このとき，A がコンパクト集合となり，格子 W に属する任意の $\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j (\mathbf{w}_i \neq \mathbf{w}_j)$ に対し，$A + \mathbf{w}_i$ と $A + \mathbf{w}_j$ は内点を共有せず，$\bigcup_{\mathbf{w} \in W} (A + \mathbf{w})$ が平面を覆うことができるとき，A は W により**タイル張り可能**という．また，タイル張りに関して次の定理が知られている．

定理 A[4]　2×2 の整数行列 M と $D = \{\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{m-1} \mid m = |\mathrm{det} M|, \mathbf{d}_j \in \mathbb{Z}^2\}$ に対して，A と W は (2.1) と (2.2) のように定義されているとする．このとき，

(a-1) M の固有値の絶対値が 1 より大きい．

(a-2) W の元が一意に表現されている．

ならば，$\bigcup_{\mathbf{w} \in W} (A + \mathbf{w})$ はタイル張りできる．

3　タイル張りと展開図

正方形二面体の展開図と準展開図について，次のように定義する [1].

定義　$\mathbb{R}^2$ 上におけるコンパクト集合 A と正方形二面体 V に対し，次の (V1)(V2) を考える．

(V1) A を適当に折りたたむことにより，重なりも隙間も無く V を覆う．

(V2) A の境界はジョルダン閉曲線である．

(V1) のみを満たすとき A を正方形二面体 V の**準展開図**といい，(V1)(V2) を満たすとき A を正方形二面体 V の**展開図**ということにする．

ここではタイル張りの理論を使って正方形二面体の展開図になるかどうかを考える．どのような条件のときコンパクト集合 A が正方形二面体の展開図になるかを調べ，次の定理を得た．

定理 3.1　$|\det M| = 2$ である 2×2 の整数行列 M と $D = \left\{ \mathbf{d}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{d}_1 \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ に対して，A, W はそれぞれ (2.1), (2.2) で定義され，A は W でタイル張り可能とし，次の (i) または (ii) が成り立つ．

(i) A の面積が 1 または 2 である．

(ii) A の面積が 4 のとき，

a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ i+4j \end{pmatrix} \mid i, j \in \mathbb{Z} \right\}$ または

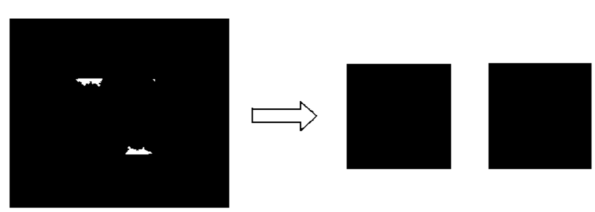
$W = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ -i+4j \end{pmatrix} \mid i, j \in \mathbb{Z} \right\}$ または

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2i \\ 2j \end{pmatrix} \mid i, j \in \mathbb{Z} \right\}$ である．

b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 4j \end{pmatrix} \mid i, j \in \mathbb{Z} \right\}$ または

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 4i \\ j \end{pmatrix} \mid i, j \in \mathbb{Z} \right\}$ で，さらに A が a) のいずれかの W でタイル張り可能である．

例）$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ のとき A の面積は 2 であり，以下のようにして正方形に沿って折りたたむと正方形二面体になる．



A　　表　　裏

定理 3.1 を証明するために次の命題が必要である．

命題 3.2 $|\det M| = 2$ である 2×2 の整数行列 M と $D = \left\{\mathbf{d}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{d}_1 \in \mathbb{Z}^2\right\}$ に対して，(2.1) および (2.2) で定義されている A, W に対し A は W によりタイル張り可能とする．

このとき，A は中心に関して点対称である．

命題 3.3 点対称な平面の部分集合 B に対し，B の中心を原点とした座標系 (X, Y) を考える．以下のいずれかの条件 (1)〜(5) を満たすならば，B が W でタイル張り可能であるとき正方形 S の 4 頂点はどれも B の内点ではない．

(1) $W = \mathbb{Z}^2$ で，正方形 S は $P_1\left(\frac{1}{2}, 0\right), P_2\left(0, \frac{1}{2}\right), P_3\left(-\frac{1}{2}, 0\right), P_4\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ を頂点とする正方形とする．

(2) $W = \left\{\begin{pmatrix} i+j \\ i-j \end{pmatrix} \mid i, j \in \mathbb{Z}\right\}$ で，正方形 S は $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), P_3\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), P_4\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ を頂点とする正方形とする．

(3) $W = \left\{\begin{pmatrix} 2i \\ j \end{pmatrix} \mid i, j \in \mathbb{Z}\right\}$ で，正方形 S は $P_1\left(0, \frac{1}{2}\right), P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right), P_3\left(1, -\frac{1}{2}\right), P_4\left(1, \frac{1}{2}\right)$ を頂点とする正方形とする．

(4) $W = \left\{\begin{pmatrix} i \\ i+4j \end{pmatrix} \mid i, j \in \mathbb{Z}\right\}$ で，正方形 S は $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), P_3\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), P_4\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ を頂点とする正方形とする．

(5) $W = \left\{\begin{pmatrix} 2i \\ 2j \end{pmatrix} \mid i, j \in \mathbb{Z}\right\}$ で，正方形 S は $P_1(1, 0), P_2(0, 1), P_3(-1, 0), P_4(0, -1)$ を頂点とする正方形とする．

4 展開図の像が展開図になるか

M の固有値の絶対値が 1 より大で，$|\det M| = 2$, $D = \{\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1\}$ のとき，$\mathbb{R}^2$ 上の写像 $f_1(\mathbf{x}) = M^{-1}\mathbf{x}$, $f_2(\mathbf{x}) = M^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{d}_1)$ $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2)$ を考える．このとき (2.1) で定義される A は $A = f_1(A) \cup f_2(A)$ を満たし，また，任意のコンパクト集合 T_0 に対し，$T_n = f_1(T_{n-1}) \cup f_2(T_{n-1})$ $(n \geq 1)$ とおくと，$\lim_{n\to\infty} T_n = A$ である [3].

そこで，T_0 を正方形二面体の展開図としたとき，何回かの写像を施したときの T_n もまた正方形二面体の展開図になっているかどうかを調べた．

まず T_n が準展開図になる条件として定理 4.1 を得た．

定理 4.1 M, D, A, W は定理 3.1 の (i) と (ii)-(a) の仮定を満たすとする．このとき，T_0 を点対称であり，W でタイル張り可能な正方形二面体の準展開図とすると，$f_1(\mathbf{x}) = M^{-1}\mathbf{x}$, $f_2(\mathbf{x}) = M^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{d}_1)$ に対し帰納的に $T_n = f_1(T_{n-1}) \cup f_2(T_{n-1})$ と置くならば，$T_n (n \geq 1)$ は正方形二面体の準展開図となる．

さらに，展開図になる条件として次の定理を得た．

定理 4.2 M, D, A, W は定理 4.1 と同じ仮定を満たすとし，T_0 を点対称であり，W でタイル張り可能な正方形二面体の展開図とする．さらに $T_0 \cup (T_0 + \mathbf{d}_1)$ は連結集合で $T_0 \cap (T_0 + \mathbf{d}_1)$ の位相次元は 1 とする．このとき，$f_1(\mathbf{x}) = M^{-1}\mathbf{x}$, $f_2(\mathbf{x}) = M^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{d}_1)$ に対し $T_1 = f_1(T_0) \cup f_2(T_0)$ は正方形二面体の展開図となる．

5 まとめと今後の課題

今回，タイル張り出来るフラクタル図形が正方形二面体になる場合について，[5] で得た定理に A の面積が 4 になる場合を追加した．A の面積が 4 のとき，W によって正方形二面体の展開図にならないときがあるが，面積が 1 または 2 のときも含めて正方形二面体の展開図になるには (2.2) で定義された W に依存せず，A がどの W でタイル張り出来るかで決まることが分かった．定理 4.1 と定理 4.2 では，定理 3.1 の (ii)-(b) の仮定を満たす場合でも T_n が準展開図になりそうだがまだ証明が出来ていない．また，定理 4.2 において T_0 が展開図ならば帰納的に T_n も展開図になる条件はあるのか調べていきたい．

参考文献

[1] J. Akiyama and C. Nara, *Colorings of Tilings Derived from a Development of a Doubly-covered Square*, preprint.

[2] J. Akiyama and C. Nara, *Tilings and fractals from developments of doubly-covered squares*, to appear in Proceedings of conference in algebla and combinatorics 2006 in Manila.

[3] J.E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J.**30** (1981), 713-747.

[4] R. Kenyon, *Self-replicating tilings*, Contemporary Math. **135** (1992), 239-263.

[5] 神尾　奈央，フラクタル図形によるタイル張りと正方形二面体の展開図，お茶の水女子大学 修士論文 (2007).