2次元セルオートマトン上の力学系

玉田　高子 (指導教官:竹尾　富貴子)

1　はじめに

セルオートマトンについては，Wolfram[5] のコンピュータ結果による分類の研究に始まり，その後 Braga ら [1] による台の広がりによる分類などもある．これらの分類は，有限台の初期状態から出発しているが，カオス性が起こるのは, 台が無限に広がる場合に考えられる．そこで，局所的規則から大域的規則へ拡張して，１次元セルオートマトン上の力学系を考えると，有限な台に対しては台が広がらない規則でも，無限な台を持つ状態を考えると，Devaney の意味のカオス [3] になることがある．これは，重みつき関数空間上のシフト作用素がカオスを起こす理論 [4] に対応している．

１次元セルオートマトンにおいて，3 近傍による局所的規則は 2^{2^3} の 256 種類しかないため，これらに関しては，個々の場合にかなりいろんなことが研究されている．規則 180 については大域的規則で考え，Devaney の意味のカオスになることも知られている [2]．ところが，5 近傍になると，$2^{2^5} \approx 4 * 10^9$ 種類になり，とても個々の場合を検討することは不可能である．また，２次元セルオートマトンに拡張しようとすると，Moore 近傍にすると 2^{2^9} 種類，Neumann 近傍にすると 2^{2^5} 種類あるため，この場合も，個々の場合を検討することは不可能である．

本研究においては，１次元 5 近傍による遷移規則で，カオス的になる条件を求め，さらにこの結果を２次元セルオートマトンの Neumann 近傍に対応させ，２次元セルオートマトン上の力学系におけるカオスになる条件を求めた．

2　１次元セルオートマトン

定義　1 次元 2 状態 5 近傍のセルオートマトンを考えると，局所的規則は，$g(c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2)$ によって決まる．

$X := \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ とし，局所的規則 g より大域的規則 $G : X \to X$ を

$$[G(\underline{x})]_i = g(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) \quad \text{for} \quad \underline{x} \in X$$

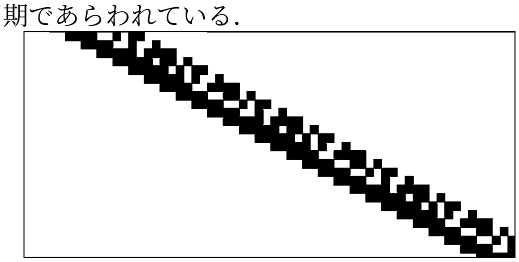
によって決める．

局所的規則 g が **(j)-injective** とは，$g(c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2)$ において c_j 成分に関して 1 対 1 であること，すなわち，(-2)-injective とは，$g(0, c_{-1}, c_0, c_1, c_2) \neq g(1, c_{-1}, c_0, c_1, c_2)$ (for $\forall c_{-1}, c_0, c_1, c_2 \in \{0,1\}$) となる．

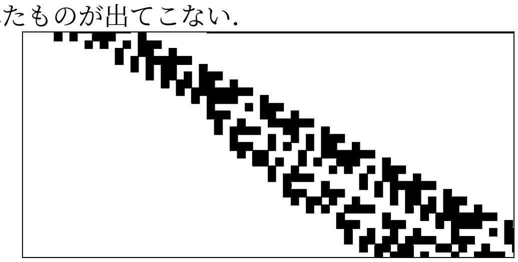
$\underline{x} \in X$ が**有限台**を持つとは，集合 $\{j \in \mathbb{Z} \mid x_j = 1\}$ が有限集合であることである．

有限台 $\underline{x}$ に G を何回か施した結果を横座標に位置を，縦座標に作用の回数をとり，表現すると以下のようになる．

A.shift に近い例
状態遷移を進めていくと，同じ状態のものがある一定の周期であらわれている．



B.shift とは程遠い例
上の例とは違い，下方に行くほど広がっており，shift されたものが出てこない．



カオス的になるためには，shift に近い状態が必要なので A のような状態遷移があらわれる条件を求めた．

命題 1　1 次元 2 状態 5 近傍のセルオートマトンにおいて，

(1) g は (-2)-injective である

(2) $g(0,0,0,0,0) = 0$

(3) $g(0, c_{-1}, c_0, c_1, 1) = 0$
(for $\forall c_{-1}, c_0, c_1 \in \{0,1\}$)

(4) $g(0, c_{-1}, c_0, 1, 0) = 0$
(for $\forall c_{-1}, c_0 \in \{0,1\}$)

が成り立つとする．このとき，有限台をもつ任意の $\underline{x} = (\cdots, x_1, x_0, x_1, \cdots) \in X$ に対して，ある M_x が存在して，$G^{M_x}(\underline{x}) = \sigma^{2M_x}(\underline{x})$ が成り立つ．

上の命題を使って，X に距離 $d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}}$ を入れると，次の定理を得た．

定理 1　1 次元 2 状態 5 近傍のセルオートマトンにおいて，命題 1 の (1)~(4) が成り立つとする．このとき，g による大域的規則 $G : X \to X$ は Devaney の意味でカオスである．すなわち，

1. 初期値に鋭敏である．
2. 位相的推移的である．
3. 周期点が稠密である．

注　命題 1 および定理 1 の結果は g が (-2)-injective を (+2)-injective に変更し，(3) および (4) をそれに対応して変更すれば同様の結果が得られる．

3　2 次元セルオートマトン

1 次元の結果を 2 次元セルオートマトンに適応させて，Neumann 近傍による局所的規則 を考える．このとき，局所的規則 g が (k, l)**-injective** とは，$g(c_{0,-1}, c_{-1,0}, c_{0,0}, c_{1,0}, c_{0,1})$ において $c_{k,l}$ 成分に関して 1 対 1 であること，すなわち，$(0, -1)$-injective とは，$g(0, c_{-1,0}, c_{0,0}, c_{1,0}, c_{0,1}) \neq g(1, c_{-1,0}, c_{0,0}, c_{1,0}, c_{0,1})$ (for $\forall c_{-1,0}, c_{0,0}, c_{1,0}, c_{0,1} \in \{0, 1\}$) となる．また，$X_2 := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ の元 $\underline{x}, \underline{y}$ に対し，距離を $d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|x_{i,j} - y_{i,j}|}{2^{|i|+|j|}}$ によって定義する．

このとき，次の命題 2，3 を得た．

命題 2　2 次元 2 状態 Neumann 近傍のセルオートマトンにおいて，

(1) g は $(0, -1)$-injective である

(2) $g(0, 0, 0, 0, 0) = 0$

(3) $g(0, c_{-1,0}, c_{0,0}, c_{1,0}, 1) = 0$
(for $\forall c_{-1,0}, c_{0,0}, c_{1,0} \in \{0, 1\}$)

(4) $g(0, c_{-1,0}, 0, c_{1,0}, 0) = 0$
(for $\forall c_{-1,0}, c_{1,0} \in \{0, 1\}$)

が成り立つとする．このとき，有限台をもつ任意の $\underline{x} \in X_2$ に対して，ある M_x が存在して，$G^{M_x}(\underline{x}) = \sigma^{M_x}(\underline{x})$ が成り立つ．

命題 3　2 次元 2 状態 Neumann 近傍のセルオートマトンにおいて，g は $(0, -1)$-injective であるならば，$G : X_2 \to X_2$ は位相的推移的である．

上の命題 2，3 を使って，次の定理が成り立つ．

定理 2　2 次元 2 状態 Neumann 近傍のセルオートマトンにおいて，命題 2 の (1)~(4) が成り立つとする．このとき，g によって作られた大域的規則 $G : X_2 \to X_2$ は Devaney の意味でカオスである．

注　命題 2 および定理 2 の結果は g が $(0, -1)$-injective を $(0, +1)$-injective，$(-1, 0)$-injective，$(+1, 0)$-injective に変更し，(3) および (4) をそれぞれに対応して変更すれば同様の結果が得られる．

4　まとめと今後の課題

以上のことから，1 次元 2 状態 5 近傍セルオートマトンの結果を 2 次元 2 状態 Neumann 近傍セルオートマトンに応用して Devaney の意味でカオスになることが示せた．今回得た結果は，カオス的になるための 1 つの十分条件であるので，今後はカオス的になるための必要十分条件を求めたい．

参考文献

[1] G. Braga, G. Cattaneo, P. Flocchini and C. Q. Vogliotti, *Pattern growth in elementary cellular automata,* Theoret. comput. Sci. **145** (1995), 1-26.

[2] G. Cattaneo and L. Margara, *Generalized sub-shifts in elementary cellular automata; the "strange case " of chaotic rule 180,* Theoret. comput. Sci. **201** (1998), 171-187.

[3] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* Addison-Wesley, 1989.

[4] M. Matsui, M. Yamada and F. Takeo, *Supercyclic and chaotic translation semigroups,* Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 3535 - 3546.

[5] S. Wolfram, *Universality and complexity in cellular automata,* Physica D **10** (1984), 1-35.