イジングマシンを用いたノックアウトトーナメントの最適化

矢口琴望　(指導教員：工藤和恵)

1　はじめに

スポーツスケジューリングという試合日程, 対戦順序, 競技施設の割り当てなどといった特定の制約条件を考慮して質の良い試合スケジュールを作成する分野があり, チーム間の移動距離や試合間隔の最適化, 競技者や観客の利便性を最大化することが求められる．また, 強さのバランスを考慮したシード配置や対戦カードの組み合わせを行うことにより, 競技の公平性を保ちつつ, 競技者や観客にとって魅力的な試合を提供する．最近では, 複雑な制約を持つスケジューリング問題を効率的に解決するアプローチが進んでおり, これにより実行可能なスケジュールが短時間で提案されるようになってきた. 参加するすべてのチームや選手が互いに 1 回以上試合を行うラウンドロビン方式では K. Eastonk らが提唱した TTP(巡回トーナメント問題) [1] がある.

本研究では, 中学校のサッカー大会の規模で試合会場までの移動距離と各学校の強さを考慮して, イジングマシンのシュミレータを用いて各試合の勝者が次のラウンドに進むノックアウトトーナメント方式の対戦表の最適化を行う．イジングマシンとは, 組合せ最適化問題の解を計算するためのコンピュータである.

2　問題設定

本研究ではノックアウトトーナメント方式の対戦表の最適化問題を解く．学校数 N 校, 試合会場数 M 箇所, 試合 ID 数 L で行う．試合 ID とはトーナメントの初戦においてシードを含む対戦カードを識別するために付けられる番号であり, 0 から $L-1$ が与えられる. この最適化問題では, 各学校と試合会場の距離や学校の強さを考慮して試合 ID に適切な会場を割り当て各試合の場所と参加学校を決定する．学校の強さランキング r_i を直近の数試合から強い順に 1 位から N 位までの値を与える．また、各学校の座標 $(s_{i,x}, s_{i,y})$ と試合 ID l に割り当てられる会場の座標 $(v_{l,x}, v_{l,y})$ を与える.

3　定式化

トーナメント構造の最適化を行うため, 以下のようにハミルトニアン H はコスト項である H_1, H_2 と制約項である H_3, H_4 の 4 項で構成した.

$$H = H_1 + \alpha H_2 + \beta H_3 + \gamma H_4 \tag{1}$$

決定変数には学校 i に試合 ID l が割り当てられるときに 1, 割り当てられなかったときに 0 となる変数 x_{il} を用いる．α, β, γ はハイパーパラメタであり, それぞれの項の重要度を調整する役割を果たす.

H_1 は距離コストを表し, 次式で与える.

$$H_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{L-1} \frac{d_{il}}{d_{\max}} x_{il} \tag{2}$$

d_{il} は学校 i に試合 ID l が割り当てられた場合の移動距離を表しており, 与えられた座標より $d_{il} = \sqrt{(s_{i,x} - v_{l,x})^2 + (s_{i,y} - v_{l,y})^2}$ で求めることができる. d_{il} を $d_{\max}$ で割ることでデータの範囲を 0 から 1 の間に収めている．H_1 のオーダーが $O(N)$ と学校数に比例して大きくなるため, スコアが適切な範囲に収まるよう調整するために $\frac{1}{N}$ をかけている.

H_2 は強さコストを表し, 学校同士の強さとその対戦タイミングを考慮してトーナメント全体のバランスを調整するコスト関数 [2] を参考に次式で与える.

$$H_2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{L-1} \sum_{l_2=0}^{L-1} p_i p_j \frac{s_{l_1 l_2}}{\lceil \log_2 N \rceil} x_{il_1} x_{jl_2} \tag{3}$$

p_i は学校 i の強さを表し, $p_i = \frac{N+1-r_i}{N}$ で与えられ $r_i < r_j$ のとき $p_i > p_j$ となる．$s_{l_1 l_2}$ は試合 ID l_1 と l_2 にいる学校が互いに勝ち上がった場合, 何回戦目で対戦するのかを表す. 正規化のために, 与えられたトーナメントで優勝するために必要な最大の試合数 $\lceil \log_2 N \rceil$ で割っている．天井関数 $\lceil \log_2 N \rceil$ は $\log_2 N$ を超えない最小の整数に切り上げる関数である．また, H_2 の値が学校数の増加に伴い $O(N^2)$ で大きくなるため, $\frac{1}{N^2}$ でスコアが適切な範囲に収まるよう調整している.

H_3 は 1 校の学校に対して試合 ID を 1 つ割り当てる one-hot 制約である.

$$H_3 = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{L-1} x_{il} - 1 \right)^2 \tag{4}$$

H_4 は 1 つの試合 ID に対して学校を 1 または 2 校割り当てる制約項である.

$$H_4 = \sum_{l=0}^{L-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_{il} - 1 \right) \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_{il} - 2 \right) \tag{5}$$

評価関数は, 距離と強さという 2 つの観点から行い, 加算方式でスコアを算出する．距離に関しては, 距離コストである H_1 の逆数を取った後, この値を $\frac{1}{10}$ 倍してスコアに加算する．強さの評価は, 初戦の組み合わせと全体の組み合わせに基づいて行う．初戦の組み合わせでは, シード枠に強い学校が含まれていることが望ましい．試合 ID l において $\sum_i x_{il} = 1$ を満たす場合, $x_{il} = 1$ となる学校 i はシード校とみなされる．このシード校 i に対して, 条件 $p_i \geq 1 - \frac{\text{シード枠の学校数}}{N} - a$ が成り立つ場合にスコアを加算する．ここで a は閾値を緩和するためのパラメータである．また, 強豪校同士の対戦が避けられていると良いとされ, この条件を確認するために $x_{il} x_{jl} = 1$ を満たす学校 i と j において $r_i + r_j \geq \frac{N}{3.5}$ が成り立つ場合にスコアを加算する. 全体の強さの評価は, $|\alpha H_2|$ を使用して行う.

4　結果

4.1　スコアの比較

上記のハミルトニアンを用いて, 参加校が 28 校, 試合 ID が 16 個として計算を行った．ソルバーは OpenJij [3]

を用いた．このときパラメータ $\alpha = 3.0$ の場合 H_1 と αH_2 が $1:1$ となる．図 1 は $\alpha = 2.5$, $\alpha = 3.5$ で制約項のハイパーパラメータ β, γ を調整したスコアのヒートマップである．

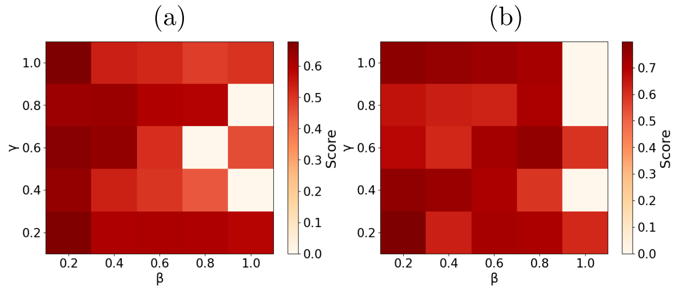

図 1: (a) $\alpha = 2.5$ でのヒートマップ．(b) $\alpha = 3.5$ でのヒートマップ．

図 1 より，いずれの場合も β が小さい領域でより高いスコアが得られることが確認される．一方で，β が大きい領域ではスコアが低下していることから，制約条件を厳しく設定することで解が制約を満たすことを優先し，目的関数の最適化の優先度が低くなってしまったと推測できる．

4.2 トーナメント表の比較

図 2 は試合会場と学校の位置を座標上にプロットし，さらに試合 ID ごとに試合を行う学校と対応する試合会場を線で結んだ図である．

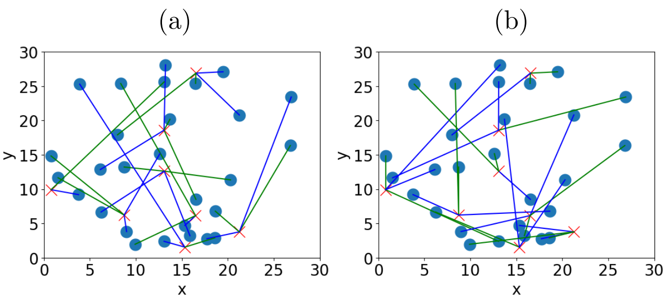

図 2: (a) $\alpha = 2.5$, (b) $\alpha = 3.5$ の条件下で，学校と試合会場の対応関係を示した．

図 2 より学校は全体的に近い試合会場に割り当てられていることがわかる．α を 3 より小さく，すなわち距離を重視した場合の方が学校の移動距離の合計が 246.562 となり，強さを重視した場合の移動距離の合計値 269.694 よりも小さくなった．

試合 ID ごとの対戦校，各学校のランキング，およびランキングの合計を表 1 で示す．α が大きい場合，シード枠には強い学校が選ばれる傾向が強まり，さらにランキングの合計においても学校数からシード枠を除いた強い学校と弱い学校でペアを組んだ場合の理想的な合計値 33 に近いペアが多く見られた．したがってこの結果は強さが十分に重視されていることを示している．

5 まとめ

本研究ではイジングマシンのシュミレータを用いて，試合会場間の移動距離や学校間の公平性を考慮した制約をモデル化し，中学校のサッカー大会を対象にノックアウトトーナメント表の最適化を試みた．

今後の課題として，実際のデータを用いた実装が挙げられる．実データに基づくモデルを構築し，その精度や結果を分析することで，理論的なアプローチと実際の競技環境とのギャップを埋めることが重要である．また，評価関数における H_1 と H_2 の比率が $3:1$ となっている原因を調査し，適切な重み付けを見つけることが求められる．さらに，学校数を増やした場合の結果の精度についても検討する必要がある．学校数が増えることで，トーナメントの構造や対戦カードが複雑になり，モデルの精度や計算コストに与える影響が大きくなる可能性がある．大規模なデータセットにおいても高い精度を維持できるよう，モデルの改善や最適化が課題となる．

表 1: (a) $\alpha = 2.5$, (b) $\alpha = 3.5$ の条件下での試合 ID ごとの対戦校，各学校のランキング，ランキングの合計．

(a)

	対戦校	学校の rank	rank の合計
l_0	1, 12	18, 23	41
l_1	18, 25	12, 26	38
l_2	5, 15	17, 6	23
l_3	4, 26	16, 25	41
l_4	20, 24	20, 4	24
l_5	8, 17	2, 10	12
l_6	10, 19	15, 28	43
l_7	23	9	-
l_8	7, 27	3, 11	14
l_9	2, 14	13, 8	21
l_{10}	6	14	-
l_{11}	16	21	-
l_{12}	3	27	-
l_{13}	13, 21	7, 22	29
l_{14}	9, 22	24, 1	25
l_{15}	0, 11	19, 5	24

(b)

	対戦校	学校の rank	rank の合計
l_0	25	26	-
l_1	12, 18	23, 12	35
l_2	3, 15	27, 6	33
l_3	21, 23	22, 9	31
l_4	6, 26	14, 25	39
l_5	2, 13	13, 7	20
l_6	11, 14	5, 8	13
l_7	7	3	-
l_8	0	19	-
l_9	10, 20	15, 20	35
l_{10}	9, 22	24, 1	25
l_{11}	17, 19	10, 28	38
l_{12}	1, 24	18, 4	22
l_{13}	4, 27	16, 11	27
l_{14}	8, 16	2, 21	23
l_{15}	5	17	-

参考文献

[1] K. Easton and G. Nemhauser and M. Trick, The traveling tournament problem description and benchmarks, *Principles and Practice of Constraint Programming—CP 2001: 7th International Conference, CP 2001 Paphos, Cyprus, November 26–December 1, 2001 Proceedings 7*, Lecture Notes in Computer Science, Springer, pp. 580–584 (2001).

[2] Bădică, Amelia and Bădică, Costin and Buligiu, Ion and Ciora, Liviu Ion and Logofătu, Doina, *Dynamic programming algorithms for computing optimal knockout tournaments*, Mathematics **9**, 2480 (2021).

[3] OpenJij, https://github.com/OpenJij/OpenJij (2025 年 1 月 16 日アクセス).