

# FCP ハミルトン閉路問題の困難性

梅林果琳 (指導教員：長尾篤樹)

## 1 はじめに

ある問題に対し、解を一意にできるかどうかを問う Fewest Clues Problem(FCP)[1] という枠組みがある。NP に属する問題の FCP 版は  $\Sigma_2P$  に属することが知られているが、NP 完全である問題の FCP 版が  $\Sigma_2P$  完全になるかどうかは明らかになっていない。本研究では、NP 完全であるハミルトン閉路問題の FCP 版を定義し、 $\Sigma_2P$  完全であることを示す。

## 2 数学的準備

### 2.1 ハミルトン閉路問題

グラフ  $G$  に対し、全ての頂点を通るような単純閉路が存在するかどうかを問う問題をハミルトン閉路問題と呼ぶ。この問題は NP 完全問題として知られており、グラフ  $G$  を二部平面 3 正則グラフ [2] に制限しても NP 完全である。

### 2.2 Fewest Clues Problem

判定問題に対して解を一意にできるかを問う Fewest Clues Problem[1] と呼ばれる枠組みが定義されている。これは判定問題  $P$  に対して、 $k$  を整数とし、高々  $k$  個の事前割当によって解を唯一にすることができるかという問題を定義する枠組みである。ハミルトン閉路問題の FCP 版を以下のように定義する。

**Definition 1.** FCP ハミルトン閉路問題は以下の入力に対し、以下の質問を解く問題である。

入力：グラフ  $G$ ，整数  $k$   
質問： $G$  上の高々  $k$  本の辺に対し事前割当を行うことで、 $G$  が持つハミルトン閉路を唯一にすることができるか？

FCP ハミルトン閉路問題への事前割当は“その辺を含む”，“その辺を含まない”の 2 通りを考慮することができる。簡単のため、以下では“その辺を含む”という事前割当のみを行えるモデルに対して証明を行う。

### 2.3 本研究の概要

ある判定問題  $P$  が NP に含まれるとき、 $P$  の FCP バージョンは  $\Sigma_2P$  に含まれることが [1] によって示されている。よって、FCP ハミルトン閉路問題は  $\Sigma_2P$  に含まれる。

$\Sigma_2P$  完全問題である FCP 1-in-3 SAT からの帰着により、FCP ハミルトン閉路問題が  $\Sigma_2P$  完全であることを示す。ここで、FCP 1-in-3 SAT は以下のような問題である。

**Definition 2.** FCP 1-in-3 SAT は以下の入力に対し、以下の質問を解く問題である。

入力：3-CNF 形式の論理式  $\phi(x)$ ，整数  $k$   
質問：各節にちょうど 1 つの真を持つ解が唯一存在するようなサイズ  $k$  の事前割当が存在するか？

FCP ハミルトン閉路問題が  $\Sigma_2P$  完全であることを示すために、FCP 1-in-3 SAT の入力  $(\phi(x), k)$  を FCP ハミルトン閉路問題の入力  $(G, k)$  に変換し、 $\phi(x)$  が唯

一解を示す  $k$  個の事前割当を持つ場合、またその時に限り、 $G$  が唯一のハミルトン閉路を持つような  $k$  個の事前割当を持つことを示す。

## 3 変換

本章では FCP 1-in-3 SAT の入力  $(\phi(x), k)$  を FCP ハミルトン閉路問題の入力  $(G, k)$  に変換する。スペースの都合上、各ガジェットの詳細と図、補題の証明は付録に掲載する。

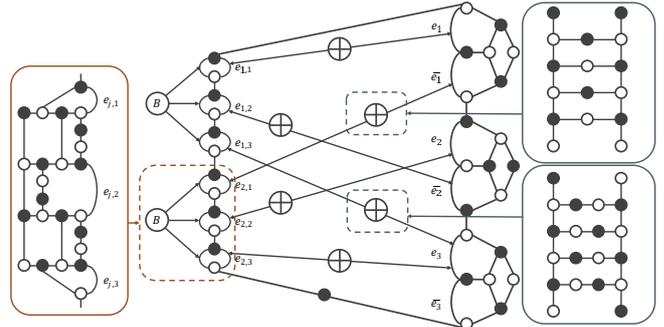


図1 帰着の概略

$\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$  が 3 種のガジェットを用いて上記のグラフへ変換される

$\phi(x)$  を変換し、図 1 のように  $G$  を構成する。まず、 $\phi(x)$  の各変数  $x_i$  に対応する変数ガジェットと、 $\phi(x)$  の各節  $C_j$  に対応する節ガジェットをそれぞれ直列に接続し、それらの上下を辺で結ぶ。このとき変数ガジェットが奇数個であれば、偶奇性を保つために間に頂点を 1 つ追加する。

次に、変数  $x_i$  が節  $C_j$  の  $l$  番目に出現するとき、 $e_{j,l}$  と  $e_{j,l}$  を接続ガジェットで結ぶ。同様に  $\bar{x}_i$  が節  $C_j$  の  $l$  番目に出現するときも、 $\bar{e}_{j,l}$  と  $e_{j,l}$  を接続ガジェットで結ぶ。

以上のように  $\phi(x)$  から構成された  $G$  に対し、以下の補題が成り立つ。

**Lemma 3.**  $\phi(x)$  が 1-in-3 SAT の YES インスタンスであるとき、またそのときに限り、 $G$  はハミルトン閉路を持つ。

以上のように構成された  $G$  上の辺の交差を解消するために、[3] によって定義されたクロスオーバーガジェットを用いる。ガジェットの詳細は付録に掲載する。

## 4 $\Sigma_2P$ 完全性

1-in-3 SAT からハミルトン閉路問題への帰着を利用し、 $\Sigma_2P$  完全である FCP 1-in-3 SAT から、FCP ハミルトン閉路問題への帰着を考える。

**Theorem 4.** FCP ハミルトン閉路問題は  $\Sigma_2P$  完全である。

*Proof.*  $(\phi(x), k)$  が FCP 1-in-3 SAT の YES インスタンスであるとする。すなわち、 $\phi(x)$  の全ての節がちょうど 1 つの正リテラルを持つ解を唯一にするような  $k$  個の変数に対する事前割当が存在するとする。この割当によって、ハミルトン閉路が一意に定まることを示す。

$\phi(x)$  への高々  $k$  個の変数に対する事前割当によって解が一意に定まるとする。つまり、その割当によって各節  $C_j$  が充足される割当が一意に定まるとする。このとき、 $\phi(x)$  の解を一意にする事前割当が行われた変数に対応する  $G$  上の各変数ガジェットに対し、その割当に相当する  $e_i$  もしくは  $\bar{e}_i$  をハミルトン閉路に含めるべき辺として事前割当を行うことを考える。事前割当により  $x_i = 1$  が割り当てられるとき、 $x_i$  に相当する変数ガジェットの  $e_i$  をハミルトン閉路に含めるべき辺として事前割当を行う。このとき、変数ガジェットはハミルトンパスを一意にもち、 $e_i$  と接続ガジェットにより接続される節ガジェットの辺  $e_{j,l}$  は  $e_i$  を含むハミルトン閉路には含まれないことが確定し、その節ガジェットもまたハミルトンパスが一意に定まる。事前割当により  $x_i = 0$  が割り当てられるとき、 $x_i$  に相当する変数ガジェットの  $\bar{e}_i$  をハミルトン閉路に含めるべき辺として事前割当を行い、以上と同様である。これにより、 $G$  への高々  $k$  本への事前割当を構成することができる。また、補題 3 より、この事前割当により  $\phi(x)$  が持つ唯一解に相当するハミルトン閉路が  $G$  上に存在し、各ガジェットの構成から、以上で得られた  $G$  への事前割当はこの唯一解に矛盾しないものとなっている。以上により、 $\phi(x)$  への高々  $k$  個の変数に対する事前割当によって解が一意に定まるとき、 $G$  への高々  $k$  個の辺に対する事前割当によって  $G$  が持つハミルトン閉路が一意に定まることが言える。

$G$  上の高々  $k$  本の辺をハミルトン閉路に含めるべきと事前に定めることで  $G$  上のハミルトン閉路を一意に定めることができる。そのような辺集合を  $F$  とする。このとき、 $F$  に含まれる辺が変数ガジェット、節ガジェット、それ以外に含まれる場合に分けられる。

$e \in F$  が変数ガジェットに含まれるとき、 $e$  が変数ガジェットのどの位置に存在するかで変数ガジェットが持つハミルトンパスは一意に定まる。これにより、その変数ガジェットが対応する  $\phi(x)$  が持つ変数への割当を考えることができる。

$e \in F$  が節ガジェットに含まれるとき、節ガジェットのハミルトンパスの取り方を考えると図 7 のように色分けを行うことができる。図 7 にある通り、節  $C_j = (l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee l_{j,3})$  を表す節ガジェットにおける全ての辺は (a: 紫色で彩色) このガジェットが持つ任意のハミルトンパスに含まれる、(b: 赤緑黄のうちいずれか 1 色で彩色) あるリテラルが 1 を持つことによって節  $C_j$  が充足される 1 パターンのハミルトンパスにのみ含まれる、(c: 赤緑黄のうちいずれか 2 色で彩色) あるリテラルが 0 を持つことによって節  $C_j$  が充足される 2 パターンのハミルトンパスにのみ含まれる、以上 3 つの状況となっている。  $e$  が (a) のパターンの辺であるとき、この事前割当は無駄な割当であると言える。すなわち、 $e$  を含む  $k$  本への事前割当でハミルトンパスを一意にできるなら、 $e$  を含まない  $k-1$  本への事前割当でハミルトンパスを一意にできると言える。  $e$  が (b) のパターンの辺であるとき、節ガジェットが持つハミルトンパスは  $e$  を彩色する色のパターンで一意に定まる。これは節  $C_j$  を充足するリテラルによりパターンが定められているので、辺  $e$  に対する事前割当はそのリテラルを真にする事前割当に相当している。  $e$  が (c) のパターンの辺であるとき、節ガジェットが持つハミルトンパスは  $e$  を彩色する色の 2 パターンが考えられる。これはこの 2 パターン両方に含まれる  $e_{j,l}$  をハミルトンパスに含め

ると指定することと同値であると言える。そのため、辺  $e$  に対する事前割当は  $e_{j,l}$  に相当するリテラルを偽にする事前割当に相当している。

$e \in F$  が変数ガジェットにも節ガジェットにも含まれないとき、すなわち、 $e$  は接続ガジェットに含まれる辺や各ガジェットを接続する辺であると言える。接続ガジェットに含まれる辺である場合、変数ガジェット側の辺への割当と、節ガジェット側への辺への割当が考えられる。このとき、変数ガジェット側への辺への割当は、変数ガジェットの辺への割当と同値であり、節ガジェット側への辺への割当は、節ガジェットの辺への割当と同値である。各ガジェットを接続する辺である場合は、この事前割当は無駄な割当であると言える。すなわち、 $e$  を含む  $k$  本への事前割当でハミルトンパスを一意にできるなら、 $e$  を含まない  $k-1$  本への事前割当でハミルトンパスを一意にできると言える。よって、この場合も変数への割当もしくは無駄な割当となっていると言える。

これらから  $G$  上の高々  $k$  本の辺をハミルトン閉路に含めるべきと事前に定めることで  $G$  上のハミルトン閉路を一意に定めることができる。この辺集合  $F$  に対応した  $\phi(x)$  への事前割当の対象となる変数集合  $X$  を定めることができ、またその変数それぞれへの割当も定めることができる。この  $\phi(x)$  への事前割当は高々  $k$  変数によって行われ、補題 3 より、 $F$  への事前割当によって示される唯一の解を  $\phi(x)$  が持つことが言える。以上のことから、 $G$  上のハミルトン閉路の解を唯一にするような  $k$  本の辺に対する事前割当が存在するとき、 $\phi(x)$  への高々  $k$  個の変数に対する事前割当によって解が一意に定まるといえる。

以上により、FCP 1-in-3 SAT から FCP ハミルトン閉路問題への多項式時間帰着が示され、FCP ハミルトン閉路問題は  $\Sigma_2P$  完全であることが示された。□

## 5 まとめと今後の課題

本研究では、FCP ハミルトン閉路問題の  $\Sigma_2P$  完全性を示した。本証明で用いた帰着先のグラフは平面二部グラフになっているため、FCP ハミルトン閉路問題は入力グラフを平面二部グラフに制限した場合でも  $\Sigma_2P$  完全であることがいえる。今後の課題として、他のグラフクラスに対して FCP ハミルトン閉路問題を考えたときの困難性や、他の NP 完全問題の FCP 版の困難性についての解析が挙げられる。

## 参考文献

- [1] Erik D Demaine, Fermi Ma, Ariel Schwartzman, Erik Waingarten, and Scott Aaronson. The fewest clues problem. *Theoretical Computer Science*, Vol. 748, pp. 28–39, 2018.
- [2] Andrea Munaro. On line graphs of subcubic triangle-free graphs. *Discrete Mathematics*, Vol. 340, No. 6, pp. 1210–1226, 2017.
- [3] Michael R Garey, David S. Johnson, and R. Endre Tarjan. The planar hamiltonian circuit problem is np-complete. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 5, No. 4, pp. 704–714, 1976.
- [4] Christos H. Papadimitriou and Kenneth Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Prentice-Hall, 1982.

# 付録

## ガジェットの詳細

まず、 $\phi(x)$  の各変数  $x_i$  に対し、図 2 のような変数ガジェットを構成する。このガジェットの上下を接続する辺を含むハミルトンパスを考えると、 $e_i$  を含む  $\bar{e}_i$  を含まないもの、もしくは  $\bar{e}_i$  を含む  $e_i$  を含まないもののみが考えられる。この特徴を利用し、 $\phi(x)$  の  $x_i$  に 1 を割り当てることにこの変数ガジェットが  $e_i$  を含むハミルトンパスを持つことと対応させ、 $x_i$  に 0 を割り当てることにこの変数ガジェットが  $\bar{e}_i$  を含むハミルトンパスを持つことと対応させるように  $G$  を構築していくことが帰着のアイデアである。

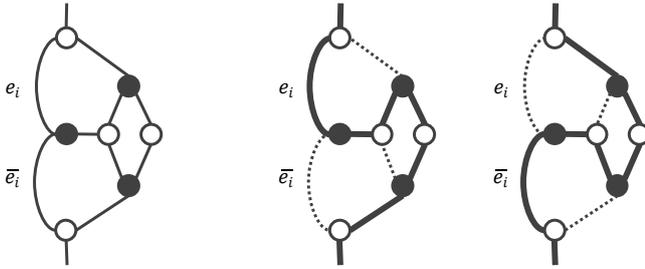


図 2 変数ガジェット

$e_i$  がハミルトンパスに含まれるかどうか  $G$  上の他の辺  $e'_i$  がハミルトンパスに含まれるかどうかに影響を与えられるような構造を用意する。そのために、[4] によって定義された接続ガジェットを用いる。図 3 に接続ガジェットの概要を示す。

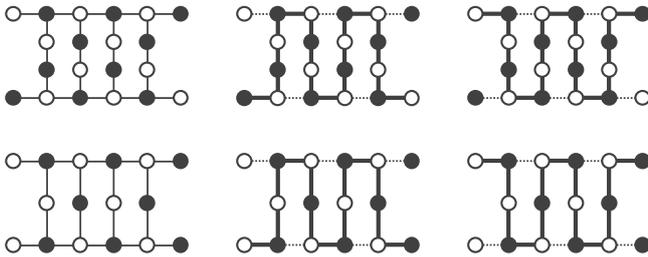


図 3 接続ガジェット

$e_i$  が接続する端点と  $e'_i$  が接続する端点の偶奇性を考え、図 3 の左側上下に示すように偶奇性の異なる 2 つの接続ガジェットを用意する。ここで、 $e_i$  が接続する端点はガジェットの左上・右上の頂点に対応し、 $e'_i$  が接続する端点はガジェットの左下・右下の頂点に対応している。各接続ガジェットのハミルトンパスを考えると、図 3 中央上下のように左下・右下の頂点を含み左上・右上の頂点を含まないものと、図 3 右側上下のように左上・右上の頂点を含み左下・右下の頂点を含まないもののみが考えられる。

次に、 $\phi(x)$  の各節  $C_j$  に対し図 4 に示すような節ガジェットを構成する。この節ガジェットに対し、以下の補題が成り立つ。

**Lemma 5.** 節ガジェットが持つハミルトンパスは、 $e_{j,1}, e_{j,2}$  を含むもの、 $e_{j,1}, e_{j,3}$  を含むもの、 $e_{j,2}, e_{j,3}$  を含むものがそれぞれ 1 つずつ存在する。

*Proof.*  $e_{j,1}, e_{j,2}$  をともに含まないようなハミルトンパス  $P$  があるとすると、このとき、 $v_5$  と  $v_{11}$  の条件から  $P$  はパス  $v_4v_5v_6v_7v_{11}v_{10}$  を含む必要がある。同様に、

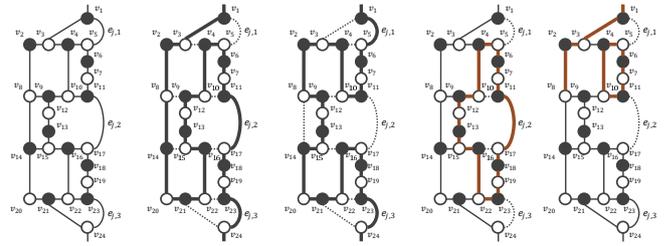


図 4 節ガジェット

$v_1, v_2$  の条件から  $P$  はパス  $v_1v_3v_2v_8$  を含む必要がある。ここで  $v_4$  に着目すると  $P$  は  $v_4v_{10}$  を含む必要が出てくるが、これは図 4 右端の状況となり、ハミルトンパスを構成できない。よって仮定が否定される。また、対称性より  $e_{j,2}, e_{j,3}$  をともに含まないようなハミルトンパスの存在も否定される。

同様に  $e_{j,1}, e_{j,3}$  をともに含まないようなハミルトンパス  $P$  があるとすると、 $v_1, v_2$  の条件と  $v_{20}, v_{24}$  の条件から  $P$  はパス  $v_1v_3v_2v_8$  とパス  $v_{14}v_{20}v_{21}v_{24}$  を含む必要がある。この条件から  $v_4$  と  $v_{22}$  に着目するとパス  $v_5v_4v_{10}$  とパス  $v_{16}v_{22}v_{23}$  もまた  $P$  に含まれる必要がある。一方で  $v_5, v_{11}, v_{17}, v_{23}$  の条件から、パス  $v_4v_5v_6v_7v_{11}e_{j,2}v_{17}v_{18}v_{19}v_{23}v_{22}$  が  $P$  に含まれる必要が発生し、これらと  $v_9v_{12}v_{13}v_{15}$  との条件から図 4 右から 2 番目に示すサイクルが生じ、ハミルトンパスを構成できない。よって仮定が否定される。

$e_{j,1}$  を含まず、 $e_{j,2}, e_{j,3}$  を含むハミルトンパス  $P$  があるとすると、このとき、 $v_5$  の条件から  $P$  はパス  $v_4v_5v_6v_7v_{11}v_{17}v_{18}v_{19}v_{23}v_{24}$  を含む必要がある。同様に、 $v_{10}, v_{16}$  の条件から  $P$  はパス  $v_4v_{10}v_9v_{12}v_{13}v_{15}v_{16}v_{22}$  を含む。また、 $v_3, v_8, v_{21}$  の条件から  $P$  はパス  $v_1v_3v_2v_8v_{14}v_{20}v_{21}v_{22}$  を含む。これらをすべて含むような  $P$  を考えると、図 4 左から 2 番目に示すパスになる。よって、このようなハミルトンパスはちょうど 1 つ存在する。

また、対称性より  $e_{j,3}$  を含まず  $e_{j,1}, e_{j,2}$  を含むハミルトンパスも、同様にただ 1 つ存在する。

$e_{j,2}$  を含まず、 $e_{j,1}, e_{j,3}$  を含むハミルトンパス  $P$  があるとすると、このとき、 $v_{11}, v_{17}$  の条件から  $P$  はパス  $v_1v_5v_6v_7v_{11}v_{10}$  と  $v_{16}v_{17}v_{18}v_{19}v_{23}v_{24}$  を含む。また、 $v_3, v_{10}, v_{16}, v_{21}$  の条件から  $P$  はパス  $v_{10}v_4v_3v_2v_8$  と  $v_{14}v_{20}v_{21}v_{22}v_{16}$  を含む。さらに、 $v_9, v_{15}$  の条件から  $P$  はパス  $v_8v_9v_{12}v_{13}v_{15}v_{14}$  を含む。これらをすべて含むような  $P$  を考えると、図 4 中央に示すパスになる。よって、このようなハミルトンパスはちょうど 1 つ存在する。

以上により、補題は成り立つ。  $\square$

ここで、 $\phi(x)$  の  $j$  番目の節  $C_j$  の  $l$  番目の変数に 1 を割り当てることを、この節ガジェットが  $e_{j,l}$  を含まないハミルトンパスを持つことと対応させる。また、 $e_{j,1}, e_{j,2}, e_{j,3}$  を接続ガジェットの各  $e'_i$  に対応させることで、 $G$  を構成することができる。

### 補題 3 の証明

*Proof.*  $\phi(x)$  が 1-in-3 SAT の YES インスタンスであるとき、 $\phi(x)$  の全ての節がちょうど 1 つの正リテラルを持つような解が存在する。解が存在するとき、またそのときに限り、変数ガジェットはハミルトンパスを持つ。補題 5 より、 $\phi(x)$  の節  $C_j$  がちょうど 1 つの正リ

テラルを持つとき、またそのときに限り、 $C_j$  に対応する節ガジェットはハミルトンパスを持つ。

また、変数  $x_i$  が節  $C_j$  の  $l$  番目に出現し、 $x_i$  に 1 を割り当てたとき、変数ガジェットのハミルトンパスには  $e_i$  が含まれ、節ガジェットのハミルトンパスには  $e_{j,l}$  が含まれない。 $x_i$  に 0 を割り当てたとき、変数ガジェットのハミルトンパスには  $e_i$  が含まれず、節ガジェットのハミルトンパスには  $e_{j,l}$  が含まれる。

接続ガジェットのハミルトンパスには  $e_i$  と  $e_{j,l}$  のうち一方のみが含まれるため、これらのガジェットのハミルトンパスを接続し、変数ガジェットと節ガジェットを上下で結ぶ辺をハミルトンパスに含めることで、 $G$  のハミルトン閉路が構成できる。

よって、 $\phi(x)$  が 1-in-3 SAT の YES インスタンスであるとき、またそのときに限り、 $G$  はハミルトン閉路を持つ。□

### クロスオーバーガジェット

以上のように構成された  $G$  においては、辺の交差は接続ガジェットと接続ガジェットの間にのみ発生している。この交差を解消するために、[3] によって定義されたクロスオーバーガジェットを用いる。図 5 にクロスオーバーガジェットの概要を示す。

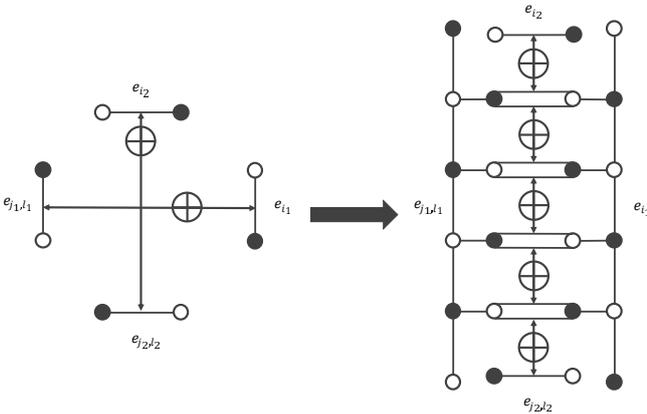


図 5 クロスオーバーガジェット

$e_{i_1}, e_{i_2}$  を変数ガジェットの辺、 $e_{j_1, l_1}, e_{j_2, l_2}$  を節ガジェットの辺とする。このとき  $e_{i_1}$  側で偶奇性が保てない場合、クロスオーバーガジェットと  $e_{i_1}$  との間に頂点を入れる。

クロスオーバーガジェットについて、以下の補題が成り立つ。

**Lemma 6.** 2つの接続ガジェット  $A, B$  が交差する状況をクロスオーバーガジェット  $C$  に置き換える。このとき、 $A, B$  が持つハミルトンサイクルのパターンと  $C$  が持つハミルトンサイクルのパターンは 1 対 1 対応を取る。

*Proof.*  $A$  と  $B$  がともに左上から右上へのハミルトンパスを持つとき、 $C$  がハミルトンパスを持つとする。 $C$  の辺  $e_{i_1}$  は  $A$  の上側に、 $e_{i_2}$  は  $B$  の上側に対応とする。このとき、 $C$  のハミルトンパスには  $e_{i_1}$  を上から下へ通るハミルトンパスと、 $e_{i_2}$  を左から右へ通るハミルトンパスが含まれる。接続ガジェットで接続された 2 本の辺のうち、片方の辺しか通ることができないため、 $C$  のハミルトンパスは一意に定まる。

対称性より、 $A, B$  がどのようなハミルトンパスを持っていても  $C$  は 1 通りのハミルトンパスを持ち、それは  $A, B$  のパターンにより異なるハミルトンパスとなっている。□

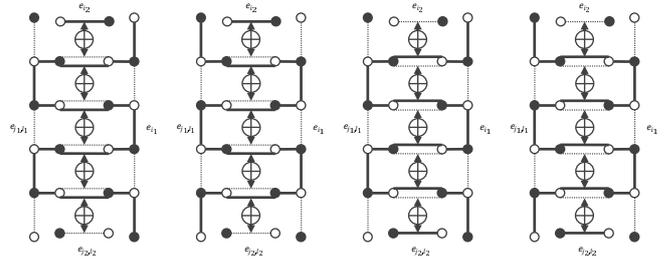


図 6 クロスオーバーガジェットの通り方

補題 6 により、補題 3 により構成される  $G$  を平面グラフへと変換することができる。

### 定理 4 の必要条件

以下の図 7 の色分けにより、定理 4 の必要条件についての証明が行われている。

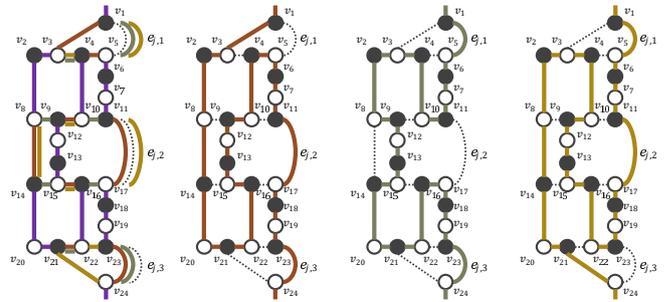


図 7 節ガジェットの 3 通りのハミルトンパス