広義 1 回読み制限を持つ有向グラフ上の計算モデルにおけるサイズ下界について

佐藤響樹　(指導教員：長尾篤樹)

1　はじめに

計算複雑性理論における計算量クラスの一部である，入力長の多項式時間で計算可能な問題のクラス P と入力長の対数領域で計算可能な問題のクラス L の厳密な包含関係は未解明である．P に属する一方で L に属さない問題が 1 つでも存在すれば L$\subsetneq$P が示される．本研究では semantic read once nondeterministic branching program という計算モデルを用いて，P に含まれるが L に含まれないと考えられている問題の 1 つである Tree Evaluation Problem の領域計算量下界を新たに証明する．

2　数学的準備

本章では各種定義を行う．スペースの都合上，以降太字で記した概念の定義については付録に掲載する．

2.1　Branching program

まず，本研究で用いる計算モデルの定義を紹介する．

Definition 2.1. *nondeterministic branching program*（*NBP*）は，有向非循環グラフで表現される計算モデルである．NBP は開始頂点と終了頂点を 1 つずつ持つ．終了頂点以外の頂点は入力変数を持ち，出次辺は変数に割り当てられる値を持つ．NBP のサイズはグラフの頂点数で定義される．ここで，NBP による関数 $f:[k]^n \to \{0,1\}$（$[k]=\{0,1,...,k-1\}$）の計算は次のように行う．入力を受け取り，開始頂点から入力に合致する有向辺を辿り，終了頂点に到達するパスが 1 つでも存在すれば入力を受理し，存在しない場合は拒否をする．

ある問題が L に属さないことを示すには，その問題を解く任意の branching program の超多項式サイズ下界を示せば良いと知られている [1]．しかし，一般の branching program に対し $\Omega(n^2/\log^2 n)$ [2] より大きい下界は見つかっていない．そこで，NBP に制約を課して超多項式下界を得てから制約を緩和し，一般の下界へアプローチする手法が取られている．

Definition 2.2. *semantic read once* NBP は，いずれかの受理される入力（Yes インスタンス）に合致する開始頂点から終了頂点へのパスすべてで，各入力変数が高々 1 度読まれる NBP である．

semantic read once NBP を用いた下界証明では**長方形**という，特別な入力を示す 5 つ組が利用される．

ある問題に対し semantic read once NBP を構成できたと仮定する．NBP の頂点のうち，複数の Yes インスタンスに対応する計算パスで共有されている 1 つの頂点 q に注目すると，変数集合を q 以前に読まれる変数集合と q 以降に読まれる変数集合に 2 分割することができ，これをもとに長方形が得られる．

サイズの大きい長方形が存在するならば 1 つの頂点で複数の Yes インスタンスを扱うことができるため，NBP のサイズを小さく抑えることができる．反対に，サイズの大きい長方形が存在しない場合は各 Yes インスタンスに対応するパスを構成する際に頂点数を少なく抑えることができないため，NBP のサイズは大きくなることが言える．

2.2　Tree Evaluation Problem

次に，本研究で扱う問題 *Tree Evaluation Problem(TEP)* [3] を定義する．

Definition 2.3. d 分木 TEP は, 高さ h, 葉が d^{h-1} 個の完全 d 分木を持つ．葉には入力変数が割り当てられ，内部ノード（葉以外のノード）には関数 $F:[k]^d \to [k]$ が割り当てられる．

入力：d^{h-1} 個の葉へ割り当てる値

出力：根ノードの出力が閾値以内であれば受理，そうでなければ拒否

2.3　三分木 TEP の領域計算量下界

semantic read once NBP を用いた既存研究では，高さ h の三分木の TEP が超多項式サイズ下界になることが証明されている [3]．

Definition 2.4. $k \in \mathbb{N}, 0<\epsilon<1$ をパラメタとし，高さ h の三分木に対する TEP を以下で定義する．

入力：$n=3^{h-1}$ 個の葉へ割り当てる値 $\vec{\xi} \in [k]^n$

出力：根ノードの出力が $k^{1-\epsilon}$ 以下ならば受理，そうでなければ拒否

Theorem 2.5. *[3]* 任意の h と十分大きい $k(k>2^{42h})$ に対し，三分木 TEP を解く任意の semantic read once NBP がサイズ $\Omega(k/n^{26}\log k)^h$ を要するような ϵ と内部関数 $\vec{F}$ の割り当てが存在する．

3　五分木 TEP の領域計算量下界

本章では既存の三分木 TEP の証明手法を応用し，五分木の場合でも超多項式サイズ下界が得られることを証明する．

Definition 3.1. $k \in \mathbb{N}, 0<\epsilon<1$ をパラメタとし，高さ h の五分木に対する TEP を以下で定義する．

入力：$n=5^{h-1}$ 個の葉へ割り当てる値 $\vec{\xi} \in [k]^n$

出力：根ノードの出力が $k^{1-\epsilon}$ 以下ならば受理，そうでなければ拒否

Theorem 3.2. 任意の $h \geq 3$ と十分大きい $k(k>2^{35h})$ に対し，五分木の TEP を解く任意の semantic read once NBP がサイズ $\Omega(k^{2-2/h}/n^{10}\log k)^h$ を要するような ϵ と内部関数 $\vec{F}$ の割り当てが存在する．

Proof. 本証明では五分木の内部ノードに割り当てる関数として，**6 可逆関数**を用いる．

Yes インスタンスの中に存在する長方形のサイズを議論するため，Yes インスタンスが十分多く存在する TEP を扱うこととする．Lemma 3.3 により，内部ノードへの起こりうる関数割り当てに対し，ほとんどの場合に TEP が Yes インスタンスを十分多く持つことが示される．

Lemma 3.3. $\vec{F}$ を内部ノードに割り当てる 6 可逆関数 $F:[k]^5 \to [k]$ のベクトルとする．Yes インスタンスの数が期待値の $\frac{1}{6}$ 以下になる事象を $Bad(\vec{F})$ とすると，その確率は $\Pr_{\vec{F}}[\mathrm{Bad}(\vec{F})] \leq \frac{1}{10}$ である．

十分多くの Yes インスタンスを持つ状況のもとで，Yes インスタンスの中に長方形が存在することを示し，長方形のサイズが十分大きいと仮定する．

長方形の存在を示すため，各 Yes インスタンスについて対応する NBP 中の計算パスをそれぞれ 1 つに固定し，**ラベル付パス $\boldsymbol{P}$ と NBP の頂点 $\boldsymbol{q}$** を得る．Lemma 3.4 は，任意の Yes インスタンスに対して P が持つ $\boldsymbol{Redtree(v_i), Whitetree(v_i), Thirdtree(v_i)}$ が特定の条件を満たすように P と q を得ることができると保証している．

Lemma 3.4. ある Yes インスタンスに対応する NBP の計算パスの中で，q と q 以前に読まれる変数を赤で彩色し，q 以降に読まれる変数を白で彩色する．このとき，以下を満たすような (P, q) が存在する．

1. Redtree(v_i) が赤変数に対応する葉を 3^{i-2} 個より多く持つ
2. Whitetree(v_i) が白変数に対応する葉を 3^{i-2} 個より多く持つ
3. Thirdtree(v_i) が赤・白変数に対応する葉をそれぞれ高々 3^{i-2} 個持つ

Lemma 3.4 により，すべての Yes インスタンスは一意に (P, q) を得る．最も多くの Yes インスタンスが示した (P, q) を考える．この (P, q) を示した Yes インスタンスのみを残し，その他を除外する．

次に v_i が持つ RedTree(v_i),Whitetree(v_i) において，最も多く赤, 白に彩色されている変数を各部分木から 1 つ選択して $\boldsymbol{\pi_{\mathbf{red}}, \pi_{\mathbf{white}}}$ にその変数のインデックスを加える．以降，すべての v_i が持つ部分木に前述の操作をして得られた π_{red}, π_{white} に含まれるインデックスに対応するすべての変数が赤, 白で彩色されている Yes インスタンスのみを扱う．

その後，π_{red}, π_{white} どちらにも含まれないインデックスの変数の割り当てが 1 通りになるよう Yes インスタンスを刈り込むことで，Yes インスタンスの長方形が示される．

Lemma 3.5. $\overline{\mathrm{Bad}(\vec{F})}$ を満たす $\vec{F}$ を持つ五分木 TEP を解くサイズ s の semantic read once NBP を $\mathcal{B}$ とする．このとき，サイズが $\frac{k^{4(h-1)-\epsilon}}{6s2^{h^2(2+\log 5)}}$ 以上である埋め込み長方形が存在し，長方形が示すすべての入力が $\mathcal{B}$ に受理される．

長方形を用いて TEP を符号化するためさらに長方形を刈り込み，P に含まれるあるノード $\boldsymbol{v_{i*}}$ **に対し特別な $\boldsymbol{r \times r}$ の長方形**（正方形）にする．$r = \frac{6^{6(h-2)}}{\epsilon}, s \leq (\frac{k^{2-\frac{2}{h}}}{n^{10}\log k})^h$ とすると，必ず特別な正方形が得られる．

Lemma 3.6. $\overline{\mathrm{Bad}(\vec{F})}$ を満たす $\vec{F}$ を持つ五分木 TEP を解くサイズ s の $\mathcal{B}$ に対し，v_{i*} について特別な埋め込み長方形が存在するような P 上のノード v_{i*} が存在する．

Lemma 3.6 で得た正方形を用いた符号化を考える．

Lemma 3.7. $\overline{\mathrm{Bad}(\vec{F})}$ を満たす $\vec{F}$ を持つ五分木 TEP を解くサイズの小さい $\mathcal{B}$ が存在すると仮定する．このとき，高々 $6hr\log k$ ビットで記述可能なベクトル $L_{\vec{F}}$ が存在する．

$L_{\vec{F}}$ と併せて，v_{i*} が持つ関数 F_* を除くすべての内部ノードの関数を記述したベクトル $\vec{F_*}$ を用いて TEP を符号化する．$L_{\vec{F}}$ と $\vec{F_*}$ を使って v_{i*} への入力を推測し，それぞれの入力に対する出力の集合を推測する．推測した入力すべてに対し，推測した出力の集合に実際の出力が含まれている事象を E とすると, その確率は $\Pr_F[E] \leq k^{-\frac{7}{9 \cdot 6^{4(h-2)}}\epsilon r^2}$ である．

最後に，$L_{\vec{F}}$ を用いた符号化のビット数を検証する．6 可逆関数 $F : [k]^5 \to [k]$ 上の一様分布を $\mathcal{F}$ とし，6 可逆関数 $F : [k]^5 \to [k]$ のベクトル上の一様分布を $\vec{\mathcal{F}}$ とする．$\vec{\mathcal{F}}$ から無作為に $\vec{F}$ を選び,

1. Bad$(\vec{F})$ ならば各関数で $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ ビット，全体で $\frac{5^{h-1}-1}{4}\mathcal{H}(\mathcal{F})$ ビットを使用して符号化する．
2. Bad$(\vec{F})$ でないならば $L_{\vec{F}}, \vec{F_*}$ と F_* を符号化する（ただし，F_* は一様分布 $(\mathcal{F} \mid E)$ からの要素）．

2 の符号化を用いた場合の必要ビット数を，1 と同様に $\mathcal{H}(\vec{\mathcal{F}})$ ビット使用した場合と比較する．Lemma 3.7 より全体の節約ビット数は

$$
\begin{aligned}
&(1 - \Pr_{\vec{F}}[\mathrm{Bad}(\vec{F})])(\log \frac{1}{\Pr_F[E]} - |L_{\vec{F}}|) \\
&= (1 - \Pr_{\vec{F}}[\mathrm{Bad}(\vec{F})])(\frac{7}{9 \cdot 6^{4(h-2)}}\epsilon r - 6h) r \log k
\end{aligned}
$$

になる．ここで，$r = \frac{6^{6(h-2)}}{\epsilon}$ より $\frac{7}{9 \cdot 6^{4(h-2)}}\epsilon r - 6h \geq 1$ が任意の $h \geq 3$ に対して成立する．Lemma 3.3 より $\Pr_{\vec{F}}[Bad(\vec{F})] \leq \frac{1}{10}$ であるから，$k > 2^{35h}$ のとき

$$
(1 - \Pr_{\vec{F}}[\mathrm{Bad}(\vec{F})])(\frac{7}{9 \cdot 6^{4(h-2)}}\epsilon r - 6h) r \log k \geq r
$$

となり，最適な符号化よりも r ビット以上短い符号化が存在してしまう．ゆえに，サイズの小さい semantic read once NBP は存在しないことが示される． □

Lemma 3.3, 3.5, 3.7 の詳細は付録に掲載する．

4 まとめと今後の課題

三分木 TEP を解く semantic read once NBP の超多項式サイズ下界の証明を，五分木 TEP へと応用することができた．semantic read once でない一般の branching program に対しても超多項式下界が保たれるならば，L$\subsetneq$P が証明できる．

今後の課題として，分岐数を一般化した d 分木の TEP に対するサイズ下界の解析，semantic read once 条件を緩和した場合の下界解析などが挙げられる．

参考文献

[1] Pavel Pudlak and Stanislav Zak. Space complexity of computations. *Preprint Univ. of Prague*, 1983.

[2] Edward I Nechiporuk. A boolean function. engl. transl. In *Sov. Phys. Dokl*, volume 10, pages 1–8, 1966.

[3] Venkatesh Medabalimi. *Branching Program Lower Bounds.* University of Toronto (Canada), 2018.

付録

A　定義

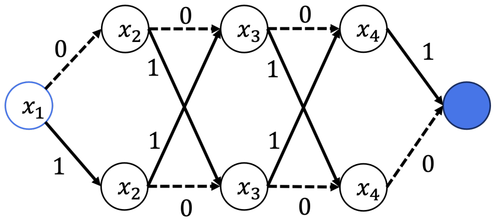

図 1　$f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$ を計算する NBP の例（サイズは 8）

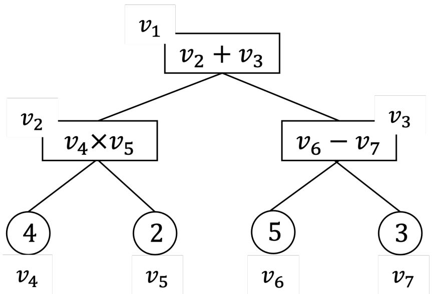

図 2　$d = 2, h = 3$ の TEP と入力の例

Definition A.1 (長方形). $\pi \subset \{1, ..., n\}$ に対し，変数集合 x_π を $x_\pi = \{x_i \mid i \in \pi\}$ で定義する．埋め込み長方形は以下を満たす 5 つ組 $(\pi_{red}, \pi_{white}, A, B, \vec{w})$ により定義される．

1. $\pi_{red}, \pi_{white} \subset 1, ..., n$ かつ $\pi_{red} \cap \pi_{white} = \emptyset$
2. $A \subseteq [k]^{|\pi_{red}|}$ は $x_{\pi_{red}}$ への割り当ての集合であり，$B \subseteq [k]^{|\pi_{white}|}$ は $x_{\pi_{white}}$ への割り当ての集合である．
3. $\vec{w} \in [k]^{n-|\pi_{red}|-|\pi_{white}|}$ は π_{red}, π_{white} どちらにも含まれない変数への割り当てである．

長方形により，$x_{\pi_{red}}$ への割り当て $\vec{\alpha} \in A$ と $x_{\pi_{white}}$ への割り当て $\vec{\beta} \in B$ と残りの変数への割り当て $\vec{w}$ から構成されるすべての割り当て $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{w})$ が定義される．長方形のサイズは $|A| \times |B|$ で定義される．

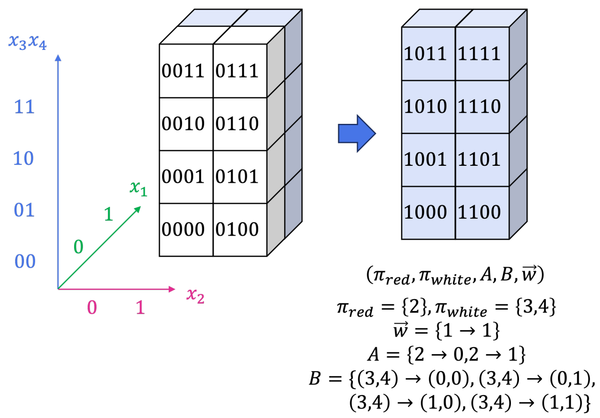

図 3　4 変数の場合の長方形のイメージ例

Definition A.2 (6 可逆関数). 関数 $F : [k]^5 \to [k]$ について，5 つの入力のうち 4 つと出力が与えられたとき，残り 1 つの入力が常に高々 6 通りになるならば，F は 6 可逆関数であるという．

Definition A.3 (ラベル付パス). 高さ h の五分木において，根から 1 つの葉へ向かうパスをラベル付パス $P = v_h v_{h-1} ... v_1$ とし，v_1 に対応する NBP 中の頂点を q とする．

P に含まれる $v_i (2 \leq i \leq h)$ が持つ 5 つの部分木は，2 つが赤に，2 つが白にラベル付され，それぞれ $Redtree(v_i), Whitetree(v_i)$ と記す．残る 1 つの部分木を $Thirdtree(v_i)$ と記す．$\mathrm{Thirdtree}(v_i)$ の根になるノードが P に含まれる v_{i-1} となる．

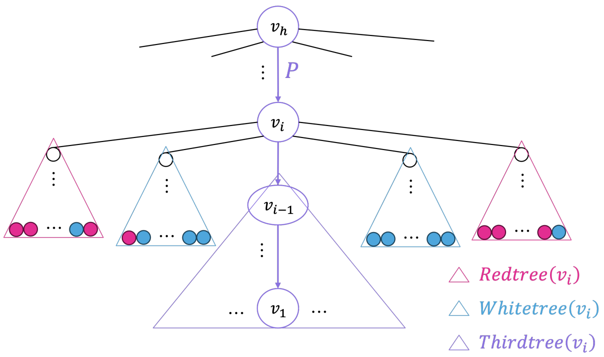

図 4　ラベル付パスのイメージ

Definition A.4 (特別な長方形). ラベル付パス P に含まれるある 1 つの頂点を v_{i*} とする．以下を満たす埋め込み長方形 $(\pi_{red}, \pi_{white}, A, B, \vec{w})$ を v_{i*} に対し特別であるという．

1. $|A| = |B| = r$
2. 2 つの $\mathrm{Redtree}(v_{i*})$ から 1 つずつ選択した赤変数のペアは A により r 通りの値を割り当てられ，2 つの $\mathrm{Whitetree}(v_{i*})$ から 1 つずつ選択した白変数のペアは B により r 通りの値を割り当てられる．

B　補題の詳細

Lemma B.1 (Lemma 3.3). $\vec{F}$ を内部ノードに割り当てる 6 可逆関数 $F : [k]^5 \to [k]$ のベクトルとする．Yes インスタンスの数が期待値の $\frac{1}{6}$ 以下になる事象を $Bad(\vec{F})$ とすると以下が成立する．

$$k > 2^{35h}, \epsilon = \frac{9h \log 6}{2 \log k} \text{に対し，} \Pr_{\vec{F}}[\mathrm{Bad}(\vec{F})] \leq \frac{1}{10}$$

Lemma B.2 (Lemma 3.5). $\overline{\mathrm{Bad}(\vec{F})}$ を満たす $\vec{F}$ を持つ五分木 TEP を解くサイズ s の semantic read once NBP を $\mathcal{B}$ とする．このとき，以下を満たす埋め込み長方形 $(\pi_{red}, \pi_{white}, A, B, \vec{w})$ が存在する．

1. $|\pi_{red}| = |\pi_{white}| = 2(h-1)$
2. $|A| \times |B| \geq \frac{k^{4(h-1)-\epsilon}}{6s2^{h^2(2+\log 5)}}$
3. $\mathcal{B}$ は長方形が示すすべての入力を受理する．

Lemma B.3 (Lemma 3.7). $\overline{\mathrm{Bad}(\vec{F})}$ を満たす $\vec{F}$ を持つ五分木 TEP を解くサイズの小さい $\mathcal{B}$ が存在すると仮定する．このとき，高々 $6hr \log k$ ビットで記述可能

なベクトル $L_{\vec{F}}$ が存在する．

$L_{\vec{F}}$ と併せて，v_{i*} が持つ関数 F_* を除くすべての内部ノードの関数を記述したベクトル $\vec{F_*}$ を用いて TEP を符号化する．$L_{\vec{F}}$ と $\vec{F_*}$ を使って v_{i*} への入力を推測し，それぞれの入力に対する出力の集合を推測する．推測した入力すべてに対し，推測した出力の集合に実際の出力が含まれている事象を E とすると，以下が成立する．

$$\Pr_F[E] \leq k^{-\frac{7}{9\cdot 6^{4(h-2)}}\epsilon r^2}$$