Moon 型 2 本ジャンケンの不規則性

豊永明香里　(指導教員：長尾篤樹)

1　はじめに

理論計算機科学における組合せ理論ではゲームやパズルの解を得ることや勝敗を決めることの複雑さも解析対象となる．誰にとっても身近なゲームであるジャンケンに対しても研究が行われている．本稿では [1] で提案された一般化ジャンケンから発展して，特定の形の n 手 2 本ジャンケンについて考察する．

2　n 手ジャンケン

ジャンケンは，各手を頂点とし任意の 2 頂点間に手同士の勝ち負けの関係を表現する有向辺を持つグラフ，すなわちトーナメントで表現できる．トーナメントは非対称完全有向グラフであり，同じ手同士の対戦にならない限りあいこは存在しない．一般的によく知られているジャンケンは 3 手だが，他の手との勝敗関係を設定した手を新たに追加することで n 手に拡張できることが [1] で紹介されている．

2.1　ジャンケンの不規則性

ジャンケンは勝敗を平等な確率の下で決める際に使用されることが多いが，各手の強さが等しくない場合には駆け引きが発生する．より多くの手に勝てる手が強そうに見えるが，相手がそのように考えることを読めば，「多くの手には勝てないものの，『最も多くの手に勝てる手』に勝てる手」には出す価値がある．このように手の強さの違い，すなわち不規則性が大きいほどプレイヤーには思考の余地があり，面白いゲームであると評価できる．ジャンケンの不規則性は以下のように定義されている．

定義 1. [1] トーナメント $T=(V,A)$ において，頂点 $x \in V$ の出次数を $\deg^+(x)$，入次数を $\deg^-(x)$ として，不規則性 $\mathrm{irr}(T)$ は次のように計算する．

$$\mathrm{irr}(T) = \sum_{x \in V} (\deg^+(x) - \deg^-(x))^2 \qquad (1)$$

不規則性は手数の違いによっても当然変化するが，手同士の勝ち負けの違いによっては，同じ手数でも不規則性に差異があるジャンケンを考えることができる．

2.2　Moon 型ジャンケン

グー・チョキ・パーのジャンケン，もしくは Moon 型であるジャンケンに対し，全てに勝つ手 W と全てに負ける手 L を追加し，W は L に負ける形のジャンケンは特に Moon 型と呼ばれている．先行研究 [2] によると，Moon 型は同じ手数のジャンケンの中で不規則性が最大になることが知られている．以下，n 手 Moon 型ジャンケンを M_n と表記する．

3　2 本ジャンケン

一般的に親しまれているジャンケンホイホイは先行研究 [1]， [2] では表現できないが，先行研究 [3] を用いて 3 手 2 本ジャンケンと定義できる．2 本ジャンケンの場合，対面させる手の組み合わせを ⟨ グー, パー ⟩ のように表記する．本稿では 2 本ジャンケンを以下のようなルールとする．

1. n 手の中から 2 手選び相手に見せる．
   ただし，⟨ グー, グー ⟩ のように同じ手を 2 つ選ぶ出し方は必ず他の手に比べて弱い選出方法となるため，プレイヤーによって出されないものとする．
2. 相手の 2 手を見て，勝負する手を自分が用意している 2 手から 1 手選び出す．
3. 自分と相手の出した手に設定された勝敗関係により，勝負がつく．

3.1　2 本ジャンケンの不規則性

一般的なジャンケンとは異なり，2 本ジャンケンは勝敗が単純には判定できない．手を見せた時点で決まる場合もあれば，お互いがどの手を出すかによって勝敗が左右されることもある．2 本ジャンケンの 2 手の関係性は以下の 4 つに分類できる．

1. $\langle a,b \rangle$ が必ず $\langle c,d \rangle$ に勝てる場合 (図 1 左上)．
   頂点 $\langle a,b \rangle$, 頂点 $\langle c,d \rangle$ 間には頂点 $\langle a,b \rangle$ から頂点 $\langle c,d \rangle$ へ接続する重み 1 の辺が存在する．
2. それぞれが最善の手を出したときにあいことなる場合 (図 1 右上)．
   頂点 $\langle a,b \rangle$, 頂点 $\langle c,d \rangle$ 間の辺の重みは 0 である．
3. 1,2 以外の場合で， $a=c, a=d, b=c, b=d$ のいずれかである場合 (図 1 左下)．
   同じ手のうち，相手のもう片方の手に勝つことができる組み合わせの頂点からもう片方の頂点へ接続する重み $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ の辺が存在する．
4. a,b,c,d 全てがそれぞれ相手の片方の手に負け，もう片方の手に勝つことができる場合 (図 1 右下)．
   頂点 $\langle a,b \rangle$ 頂点 $\langle c,d \rangle$ 間の辺の重みは 0 である．

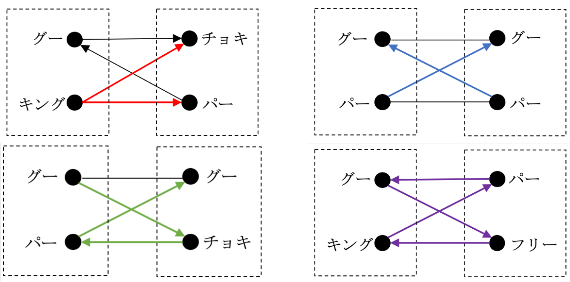

図 1　各手の関係性

[3] ではジャンケン T に対し，その 2 本ジャンケンを T^2 と表記し，その不規則性の計算方法を次のように定義している．

頂点 $\langle a,b \rangle$ から頂点 $\langle c,d \rangle$ への辺に場合によって重みを付与し，頂点 $\langle a,b \rangle$ から出る辺の重みの総和を $\deg^+(\langle a,b \rangle)$，頂点 $\langle a,b \rangle$ に入る辺の重みの総和を $\deg^-(\langle a,b \rangle)$ として，(1) と同様に計算する．

この定義より，例えば $\mathrm{irr}(M_5^2) = 96$ であることが確認できる．

また，等しい不規則性を持つ異なる n 手ジャンケンにおいて、それらの 2 本ジャンケンが常に等しい不規則性を持つとは限らないことが示されている [3]。

本研究では n 手 2 本ジャンケンの不規則性について考察するため，まずは特別な形である $2n+3$ 手 2 本 Moon 型ジャンケンに対し解析を行う．

4　Moon 型 2 本ジャンケンの不規則性解析

本章では $2n+3$ 手 2 本 Moon 型ジャンケン M^2_{2n+3} の不規則性 $\mathrm{irr}(M^2_{2n+3})$ を解析する．以後 Moon 型ジャンケンにおいて，簡略化のためグー, チョキ, パーのいずれかを J，$W_j(i<j)$, または L_i 以外の全ての手に勝てる手を W_i，$L_j(i<j)$, または W_i 以外の全ての手に負ける手を L_i と表記する．i,j にはその手の階層を表す数字が入り，$2n+3$ 手ジャンケンで新たに追加される手は W_{2n+3}, L_{2n+3} と表記する．

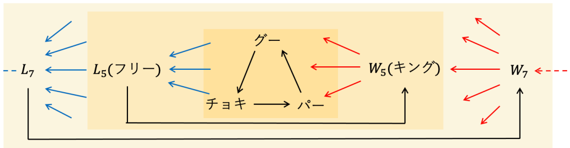

図 2　$2n+3$ 手 Moon 型ジャンケンの勝敗関係

4.1　重み α の辺と頂点の重み

3.1 節で確認した 2 本ジャンケンの手の関係性 3. に示すような状況では 2 手間の辺の重みを何かしらの変数 α と置いている。一方で、この α は頂点の重みに影響を与えないことを以下のように証明できる．

定理 2. 任意のジャンケン $T=(V,A)$ とその 2 手ジャンケン T^2 を考え，$X,Y,Z \in V$ とする．T^2 上の頂点 $\langle X,Y\rangle$ が重み α の辺を持つならば，その辺は $(\langle X,Y\rangle,\langle Y,Z\rangle)$ と表記でき，さらに頂点 $\langle X,Y\rangle,\langle Y,Z\rangle,\langle Z,X\rangle$ は常に重み α の辺の 3 サイクルを形成する．

Proof. 定義より，頂点 $\langle X,Y\rangle$ から $\langle Y,Z\rangle$ に重み α の辺が伸びているとき X,Y,Z 間の勝敗関係は，$X\to Y$，$Y\to Z$，$Z\to X$ となる．このとき，$\langle X,Y\rangle$，$\langle Y,Z\rangle\langle Z,X\rangle$ 間には $\langle Z,X\rangle$ から $\langle X,Y\rangle$ へ重み α の辺が，$\langle Y,Z\rangle$ から $\langle Z,X\rangle$ へ重み α の辺が伸びる．よって $\langle X,Y\rangle,\langle Y,Z\rangle,\langle Z,X\rangle$ は重み α の辺の 3 サイクルを形成する．□

定理 2 は $2n+3$ 手や Moon 型に限らず，全ての n 手 2 本ジャンケンで成り立つ性質である．このため，以下の系が成り立つ．

系 3. 任意のジャンケン $T=(V,A), x,y,\in V$ において，$\deg^+(\langle x,y\rangle)-\deg^-(\langle x,y\rangle)$ は α に依存しない．

4.2　不規則性の計算方法

5 手 2 本 Moon 型ジャンケンの不規則性の計算式には，手の組み合わせ毎にある程度の規則が見える．最終的な値は 96 であったが，これを求める計算式は $96=(4\times3)+(16\times3)+(9\times3)+(9)=(\langle J,J\rangle\times3)+(\langle J,W\rangle\times3)+(\langle J,L\rangle\times3)+(\langle W,L\rangle)$ のように辺の重みを手の組み合わせのパターン毎に分類し，その頂点数の積を取ったものの総和として考えられる．

不規則性の解析に際して，M^2_{2n+3} 上の各手の $\deg^+$，$\deg^-$ を解析する．このとき 5 手 2 本にあった 4 パターンに加えて，$\langle W_i,W_j\rangle,\langle L_i,L_j\rangle$ を含めたの 6 パターン分計算する．

4.3　$\mathrm{irr}(M^2_{2n+3})$ の一般式

定理 2 より，$\mathrm{irr}(M^2_{2n+3})$ の値を求めるには重み 1 の辺が存在する $\langle a,b\rangle$ が $\langle c,d\rangle$ に必ず勝つパターンの個数のみ数え上げれば良い．また，手の重複を避けるため，$\langle W_i,W_j\rangle,\langle L_i,L_j\rangle$ に関しては，計算上常に $i<j$ と仮定した．

以上の設定で全ての手の組み合わせについて解析を行った結果，各頂点の重みは以下のようになった．

1. 頂点 $\langle J,J\rangle$ の重み：(n^2+n)
2. 頂点 $\langle J,W_i\rangle$ の重み：$(-n^2-n+2ni+i^2+3i^2)$
3. 頂点 $\langle J,L_i\rangle$ の重み：$(-n^2-n-i)$
4. 頂点 $\langle W_i,L_j\rangle$ の重み：
   $(n^2-n+2ni+i^2+3i-j)$
5. 頂点 $\langle W_i,W_j\rangle(i>j)$ の重み：
   $(-n^2-n+2nj+i+j^2+3j)$
6. 頂点 $\langle L_i,L_j\rangle(i>j)$ の重み：
   $(-n^2-n-2ni+i^2-3i-j)$

これらの値を利用して $\mathrm{irr}(M^2_{2n+3})$ を計算したところ，一般式は以下の通りになった．

$$\mathrm{irr}(M^2_{2n+3})=\frac{8n^6}{3}+\frac{76n^5}{5}+\frac{97n^4}{3}+31n^3+13n^2+\frac{9n}{5}$$

実際に，$n=2$ を代入すると先行研究 [3] で示されている $\mathrm{irr}(M^2_7)=96$ と値が一致することが確認できる．さらに n を大きくすると，$\mathrm{irr}(M^2_9)=9216$，$\mathrm{irr}(M^2_{11})=36964$，$\mathrm{irr}(M^2_{13})=113584$ となる．

5　まとめ・今後の課題

本研究では，2 本ジャンケンの定義を基に $2n+3$ 手 2 本 Moon 型ジャンケンの解析を行い，その不規則性の一般式と，不規則性が部分的な重みに依存しないことを示した．

今後の課題として，n 手ジャンケンにおいて Moon 型の不規則性が最大であることから，n 手 2 本ジャンケンにおいても同じ手数の中で不規則性が最大になる形は Moon 型であることの確認が考えられる．

参考文献

[1] 伊藤大雄．一般化ジャンケン．オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学: Operations research as a management science research, Vol. 58, No. 3, pp. 156–160, 2013.

[2] Hiro Ito. How to generalize janken–rock-paper-scissors-king-flea. In *Computational Geometry and Graphs: Thailand-Japan Joint Conference, TJJCCGG 2012, Bangkok, Thailand, December 6-8, 2012, Revised Selected Papers*, pp. 85–94. Springer, 2013.

[3] 深谷詩穂, 長尾篤樹．n 手 2 本ジャンケンの不規則性解析．お茶の水女子大学理学部情報科学科卒業研究予稿, 2021.