基般

安定マッチング問題

宮崎 修一
京都大学 学術情報メディアセンター

安定マッチング問題

2012 年のノーベル経済学賞は，UCLA 名誉教授の Lloyd S. Shapley 氏とハーバード大学教授の Alvin E. Roth 氏に贈られた．受賞の対象となった業績の 1 つが，**安定マッチング問題**に関する基礎研究とその応用である．

正確な定義は後述するが，安定マッチング問題とは大まかに言うと以下のようなものである．たとえば，大学における卒論生（4 回生）の研究室配属を考えてみる．各研究室には，スタッフ数や設備などの制約から, 受け入れ可能な学生数の上限（定員数）がある．各学生は，研究室を行きたい順に並べた**選好リスト**を事務に提出する．同様に，研究室も学生を来てほしい順に並べた選好リストを事務に提出する．これらのデータから, 学生の研究室への配属（マッチングとも言う）を求めるものである．

配属の方法はいろいろ考えられるが，ここでは**安定性**という概念を重要視する．ある配属 M を決定したとしよう．この配属のもとで，学生 s は研究室 L に配属されており，別の研究室 L' には，4 人の学生 s_1, s_2, s_3, s_4 が配属されていたとする（**図 -1** 左）．ここで, s は L よりも L' の方を好んでおり, L' は s_3 よりも s の方を好んでいたとしよう．すると，与えられた M に従わずに，s は L から抜け出して L' に行き，L' は s_3 を追い出して s を受け入れると（**図 -1** 右），s も L' も得をすることになる．このように，s と L' の自発的な行動により壊れてしまう危険をはらんでいるため, M は**不安定**であるという．

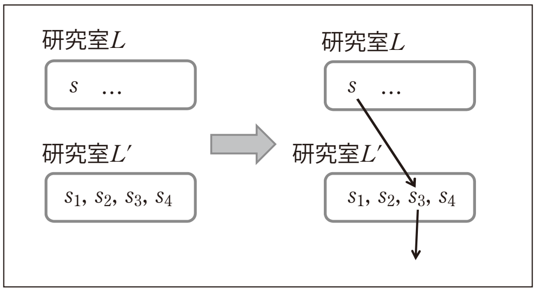

図 -1　研究室配属の例

逆に，このような (s, L') の組が存在しない配属は**安定**であるという．安定な配属では，学生が自分の配属された研究室よりも良い研究室を訪れたとしても，そこは自分よりも（その研究室にとって）良い学生で埋まっており, 自分は受け入れてもらえない．

このような配属問題は，上記の卒論生配属にとどまらず，高校への生徒割り振りや新入社員の部署への配属など, さまざまな場面で起こり得る．中でも，病院への研修医配属は，古くから多くのシステムで安定マッチングが利用されている例として有名である．たとえば米国の研修医配属では，（微小な修正はあったものの）安定マッチングを利用した方式が 1950 年代から使われ続けている．日本では，以前は大卒者の就職活動のように医学部卒業予定者と病院との間で個別に行われていたが，2004 年度配属分から安定マッチングを利用した集中方式が採られ始めた．このように同じ方式が長期間使われている理由は，安定性の概念が社会に広く受け入れられている（そのため参加者からあまり不満が出ない）ことが大きいと考えられている．事実，安定な結果を生み出す配属システムはそうでないものに比べて長続きしているという調査結果がある．

1:	c	e	a	d	b	a:	4	1	3	2	5
2:	a	b	c	d	e	b:	5	1	2	3	4
3:	a	d	c	e	b	c:	2	3	1	5	4
4:	b	e	d	a	c	d:	3	4	2	5	1
5:	d	a	e	b	c	e:	3	1	5	2	4

図 -2　入力例 I_1

1:	c	e	ⓐ	d	b	a:	4	①	3	2	5
2:	a	ⓑ	c	d	e	b:	5	1	②	3	4
3:	a	d	ⓒ	e	b	c:	2	③	1	5	4
4:	b	e	ⓓ	a	c	d:	3	④	2	5	1
5:	d	a	ⓔ	b	c	e:	3	1	⑤	2	4

図 -3　マッチング M_1

安定マッチング問題は David Gale 氏と上述の Shapley 氏により 1962 年に提案された [1)]．その後，数学，経済学，計算機科学などの分野でさまざまな角度から研究されており，現在では関連論文は 500 を超えると言われている．

本稿では，安定マッチングの基本的な性質や関連する研究成果を，主にアルゴリズムの観点から非専門家向けに紹介する．なお以下では，分かりやすさを重視するため，本来とは異なる定義を使うなど，多少正確性を犠牲にすることもあるが，容赦いただきたい．

安定結婚問題

安定結婚問題とは，前章で述べた安定マッチング問題の 1 対 1 バージョン，すなわち，どの研究室も定員が 1 である特別な場合である．1 対 1 であるため研究室側も学生側も対等であり，学生を男性，研究室を女性と考えれば男女間の結婚と見なせることから，安定結婚問題と呼ばれる．多対 1 の方がはるかに実用性が高いのだが，1 対 1 の方がシンプルで考えやすく，1 対 1 で成り立つ結果の多くが多対 1 でも成り立つことから，1 対 1 バージョンの研究はかなり行われている．本稿でも，1 対 1 の結婚問題を基本として説明する．

安定結婚問題の入力例は，同数（以後 n 人とする）の男女と，各個人の選好リストからなる．選好リストとは，異性を自分の好きな順に第 1 位から第 n 位まで並べたものである．**図 -2** の入力例 I_1 は n=5 で，1 ～ 5 が男性，a ～ e が女性である．選好リストは左から右に向かって好きな順に書くものとする．たとえば男性 1 は，女性 c が 1 番好きで，その後 e, a, d, b の順で好きである．

マッチングとは，男女のペア n 組からなる集合で，誰も 2 人以上とはペアになっていないものである．たとえば $M_1=\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d), (5, e)\}$ はマッチングである．ペアの相手を選好リスト上で○で囲むと，**図 -3** のようになる．

マッチング M により p と q がペアになっているとき，$M(p)=q$ および $M(q)=p$ と書く．マッチング M において，男性 m は $M(m)$ よりも w を好み，女性 w は $M(w)$ よりも m を好むとき，(m, w) を M に対する**ブロッキングペア**という．つまりブロッキングペアは，前章で述べた「マッチングを壊す危険性を持つペア」ということになる．ブロッキングペアを含まないマッチングを**安定マッチング**という．たとえば M_1 では $(1, e)$ がブロッキングペアであるため，M_1 は不安定である．

この問題に対する最も基本的な問いは，「どのような入力に対しても安定マッチングが存在するか？」であろう．答えは「YES」，すなわち任意の入力例に対して安定マッチングは少なくとも 1 つ存在する．では，それをどのように見つければよいのであろう？　n 人ずつの男女がいる場合，考えられるマッチングの総数は $n!$ であり，安定かどうかを 1 つ 1 つチェックしていくのでは n=30 程度でも到底終わりそうにない（ちなみに最近の日本の研修医配属では，定員総数が約 10,500，研修医が約 8,500 人である）．次章では，安定マッチングを効率良く見つけるアルゴリズムを紹介する．

Gale-Shapley アルゴリズム

Gale と Shapley は文献 1）の中で，安定マッチングを見つけるアルゴリズムを提案している．開発者の名前にちなんで **Gale-Shapley アルゴリズム**

や，動作の内容から **Deferred Acceptance アルゴリズム**と呼ばれている．以下では略して GS アルゴリズムと記す．アルゴリズムの動作中，各人は「フリー」または「婚約中」のいずれかの状態にある．最初の時点では全員がフリーである．アルゴリズムの 1 ステップでは，フリーの男性（m とする）が自分の選好リストの中でトップにいる女性（w とする）にプロポーズする．w が現在フリーならば，そのプロポーズを受け入れ，(m, w) が婚約する．w が婚約中ならば，現在の相手（m' とする）と m を比べ，より好きな方と婚約する．つまり，m' の方が好きであれば m を振り m' と現在の婚約関係を続け，m の方が好きであれば m' を振り新たな婚約関係 (m, w) が成立する．この際，振られた方の男性はフリーになり，自分のリストから w を削除する（つまり，2 度同じ女性にはプロポーズしない）．以上の動作をフリーの男性がいなくなるまで続け，その時点での婚約ペアを出力するのが GS アルゴリズムである．以下に GS アルゴリズムの疑似コードを示す．

Gale-Shapley アルゴリズム

```
M=∅ とし，全員をフリーにする．
while フリーの男性がいる do
  任意のフリー男性を m とする．
  m の選好リストの先頭の女性を w とする．
  if w がフリー then
    (m, w) を M に加え，m と w を婚約中にする．
  end if
  if w が婚約中 then
    w の婚約相手を m′ とする．
    if w は m より m′ が好き then
      m の選好リストから w を削除する．
    else
      M から (m′, w) を削除し，(m, w) を加える．m′ をフリーに，m を婚約中にし，m′ の選好リストから w を削除する．
    end if
  end if
M を出力する．
```

図 -2 の I_1 に対する GS アルゴリズムの動作例を見てみよう．まず男性 1 が c にプロポーズして $(1, c)$ が婚約する．次に 2 が a にプロポーズして $(2, a)$ が婚約する．次に 3 が a にプロポーズするが，a は 2 と婚約中なので 2 と 3 を比較する．a は 2 よりも 3 の方が好きなので，2 を振って 3 と婚約する．2 はフリーに戻り，自分のリストから a を削除する．以下同様に行っていくと，**図 -4** に示すマッチング M_2 が得られる．

このマッチングが安定であることは，容易に確かめられるであろう．一般に GS アルゴリズムの結果が安定であることの証明は, それほど難しくはない．なお，フリーな男性が複数いる場合，誰が次にプロポーズを行うかの任意性があるが，どのような順序でプロポーズを行ったとしても同じ安定マッチングに行き着くことが知られている．また，当然であるが，男性と女性の役割を入れ換えて，女性がプロポーズをし, 男性がプロポーズを受けるようにしても，安定マッチングが求まる．ただし，この場合は，男性プロポーズの場合と同じマッチングが求まるとは限らない（すなわち，安定マッチングは唯一とは限らず，一般には複数存在する）．

耐戦略性

本稿のはじめに，安定マッチングが研修医配属に長期に渡って使われ続けた理由は安定性によるところが大きいと書いたが，もう 1 つの大きな要因とし

1:	c	e	a	d	b	a:	4	1	3	2	5
2:	a	b	c	d	e	b:	5	1	2	3	4
3:	a	d	c	e	b	c:	2	3	1	5	4
4:	b	e	d	a	c	d:	3	4	2	5	1
5:	d	a	e	b	c	e:	3	1	5	2	4

図 -4　安定マッチング M_2

てGSアルゴリズムの**耐戦略性**が挙げられる．前章のように，男性プロポーズのGSアルゴリズムを使って安定マッチングを求めるものとする．このとき，どの男性も，嘘の選好リストを提出することにより，より良い相手とペアになることはできないというものである．たとえば図-4のM_2において，男性2は第2希望のbとペアになっているが，どのように選好リストを偽ったとしても絶対に第1希望のaとはペアになれないのである（ただし，逆に悪くなってしまうことはあり得る）．

比較のために，**ボストン方式**と呼ばれる配属方式を見てみよう．まず第1ステップで，男性全員が第1位の女性にプロポーズする．ちょうど1人の男性からプロポーズを受けた女性は，その男性とカップルになる．複数の男性からプロポーズを受けた女性は，その中で最も好きな男性とカップルになり，残りの男性を振る．この段階でできたカップルはこの時点で確定し，以後変更されることがない（GSアルゴリズムでは，一度婚約が成立しても，後のプロポーズにより解消されることがある．これが「Deferred Acceptance」の名前の由来である）．第2ステップでは，第1ステップで振られた男性全員が第2位の女性にプロポーズする．もちろん，第1ステップですでにカップルが確定している女性にプロポーズしても振られることになる．まだカップルになっていない女性の動作は第1ステップと同じである．以後，全員がマッチするまでこれを繰り返す．

さて，**図-5**の入力I_2に対してボストン方式を適用させると，{(1, a), (2, c), (3, b)}というマッチングが得られる．しかし，2がもし「b a c」という選好リストを提出していたら，{(1, a), (2, b), (3, c)}というマッチングが得られ，2は得できることになる．つまり，ボストン方式は（上記の意味の）耐戦略性を持たないのである．

この例では，男性2は自分に好印象を抱いていないaよりも，好印象を抱いてくれているbをあえて1位と宣告することにより，戦果を上げている．このように，耐戦略性を満たさない方式では，戦略を練ったり相手の出方を窺ったりと，不要なコストを

1:	a	b	c	a:	3	1	2
2:	a	b	c	b:	2	3	1
3:	b	c	a	c:	1	2	3

図-5　入力例I_2

1:	a	b	c	a:	2	1	3
2:	b	a	c	b:	1	2	3
3:	a	c	b	c:	3	1	2

図-6　入力例I_3

生じさせる可能性がある．一方GSアルゴリズムは耐戦略性を満たすので，複雑なことは考えずに自分の希望を素直にリストに書けばよいという安心感がある．事実，このボストン方式は1999年から2005年までボストン市において公立小中学校へ生徒を割り振るための方式として使われていたが，耐戦略性の不備を主な理由としてGSアルゴリズムへと変更された．

なお，上でGSアルゴリズムが耐戦略性を持つと言ったが，それは男性プロポーズの場合に男性がリストを操作しても得しないという意味である．実は，男性プロポーズのGSアルゴリズムでは，女性側はリストを操作して得する可能性がある．**図-6**の例I_3を見てみよう．

GSアルゴリズムで得られる結果は{(1, a), (2,b), (3, c)}となる．しかし，もし女性aが「2 3 1」という偽の選好リストを提出したら，得られるマッチングは{(1, b), (2, a), (3, c)}となり，aはより良い相手を得ることができる．

ちなみに，常に安定な解を出力し，かつ，すべての参加者に対する耐戦略性を持つ（すなわち，どの参加者も嘘をついて得をしない）アルゴリズムは存在しない．

最適安定マッチング

安定結婚問題にはさまざまな興味深い性質があるが，ここではそのうちの1つを紹介しよう．同じ入力例に複数の安定マッチングが存在するとして，そ

$$\begin{array}{llllll@{\qquad}llllll}
1: & c & e & a & d & b & a: & 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\
2: & a & b & c & d & e & b: & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
3: & a & d & c & e & b & c: & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\
4: & b & e & d & a & c & d: & 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\
5: & d & a & e & b & c & e: & 3 & 1 & 5 & 2 & 4
\end{array}$$

図 -7　安定マッチング M_3

$$\begin{array}{llllll@{\qquad}llllll}
1: & c & e & a & d & b & a: & 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\
2: & a & b & c & d & e & b: & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
3: & a & d & c & e & b & c: & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\
4: & b & e & d & a & c & d: & 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\
5: & d & a & e & b & c & e: & 3 & 1 & 5 & 2 & 4
\end{array}$$

図 -8　安定マッチング M_4

$$\begin{array}{llllll@{\qquad}llllll}
1: & c & e & a & d & b & a: & 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\
2: & a & b & c & d & e & b: & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
3: & a & d & c & e & b & c: & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\
4: & b & e & d & a & c & d: & 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\
5: & d & a & e & b & c & e: & 3 & 1 & 5 & 2 & 4
\end{array}$$

図 -9　安定マッチング M_5

$$\begin{array}{llllll@{\qquad}llllll}
1: & c & e & a & d & b & a: & 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\
2: & a & b & c & d & e & b: & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
3: & a & d & c & e & b & c: & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\
4: & b & e & d & a & c & d: & 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\
5: & d & a & e & b & c & e: & 3 & 1 & 5 & 2 & 4
\end{array}$$

図 -10　安定マッチング M_6

のうちの 2 つを M, M' とする．各男性 m は，M でのパートナー $M(m)$ と M' でのパートナー $M'(m)$ のうち，好きな方を選ぶ（もし $M(m)=M'(m)$ ならば，その人を選ぶ）．するとその結果は，安定マッチングになっているというものである．この操作は各男性が 1 人の女性を選ぶというものなので，そもそも結果がマッチングになることすら保証していないことに注意していただきたい．

実際に例を用いて確かめよう．図 -2 の入力例 I_1 に対する安定マッチング M_3（**図 -7**）と M_4（**図 -8**）に対して上記の操作を施すと，M_5（**図 -9**）が得られる．M_5 が安定であることを確かめていただきたい．実はこの逆も成り立ち, 各男性が $M(m)$ と $M'(m)$ のうち，より**嫌いな方**を選んでも，結果は安定マッチングとなる．M_3 と M_4 にこの操作を施すと M_6（**図 -10**）が得られるが，これもまた安定である．

さらに，男性と女性の損得はトレードオフの関係にある．女性の側から見ると，M_5 では M_3 と M_4 のうち悪い方のパートナーとペアになっており，M_6 では M_3 と M_4 のうち良い方のパートナーとペアになっている．

この性質は，3 つ以上の安定マッチングを対象にした場合にも拡張できる．すなわち，$k(\geq 3)$ 個の安定マッチングを持ってきて，各男性がこの k 個のマッチングのパートナーの中で最も好きな人を選ぶと，結果は安定マッチングになる．

そこで，この操作をすべての安定マッチングを対象に行ってみると，もちろん安定マッチングが得られるが，これは，どの男性もパートナーになり得る女性の中で最高の人を射止めることができているので，すべての男性にとって最適な解となる．これを**男性最適安定マッチング**という．実は，男性プロポーズの GS アルゴリズムで得られる結果は，常に男性最適安定マッチングである．先に述べたトレードオフの性質から容易に推測できるように，このマッチングは女性にとっては最悪の人とパートナーになっており，同時に**女性最悪安定マッチング**とも呼ばれる．また，これまでの議論を男女交換して考えると，**女性最適安定マッチング**も存在し，それは同時に**男性最悪安定マッチング**である．I_1 の場合は M_2 が男性最適，M_6 が女性最適である．

なお，1 つの入力例に対して安定マッチングは一般には複数存在すると前述したが，この I_1 に対しては $M_2 \sim M_6$ の 5 個ですべてである．一般には，2 のべき乗である任意の n について，男性数 n で安定マッチングを $2.28^n/(1+\sqrt{3})$ 個以上持つ入力例が存在する．

より良い安定マッチング

GS アルゴリズムにより安定マッチングを求められることは分かったが，それは前章で述べたように，偏りのある安定マッチングである．たとえば研修医と病院のマッチングの場合は，組織（病院）よ

り個人（研修医）を優遇するのは社会的常識であり，研修医最適安定マッチングを採用することに賛同が得られるであろう（事実，ほとんどのシステムでは研修医や学生からプロポーズするアルゴリズムを使い，研修医最適，学生最適安定マッチングを求めている）．しかし，男女間のマッチングのように，対等な 2 つのグループを扱う場合は注意が必要である．そこで本章では，安定マッチングの「良さ」を定義し，より良い安定マッチングを求める問題を考える．安定マッチングの「良さ」の指標としてはさまざまなものが提案されているが，ここでは代表的な 3 つを紹介する．

マッチング M において人 p がマッチしている相手の順位を p の**不満度**と呼び，$r_M(p)$ と書く．たとえば図 -7 の M_3 において，男性 2 は第 3 位の女性 c とペアになっているので $r_{M3}(2)=3$ である．以下では男性集合を X，女性集合を Y とする．

全員の不満度の和，すなわち

$$\sum_{p\in X\cup Y} r_M(p)$$

が最小となる安定マッチング M を**最小不満度安定マッチング**と言う．最も不満な人の不満度，すなわち

$$\max_{p\in X\cup Y} r_M(p)$$

が最小となる安定マッチング M を**最小後悔安定マッチング**と言う．男女間の不満度の差，すなわち

$$\left|\sum_{p\in X} r_M(p) - \sum_{p\in Y} r_M(p)\right|$$

が最小となる M を**男女平等安定マッチング**と言う．たとえば I_1 では，最小不満度安定マッチング，最小後悔安定マッチング，男女平等安定マッチングはそれぞれ，M_6，M_5，M_4 である．

これらを求める問題は，1 つ 1 つの安定マッチングに対して指標の値を計算していけば解くことができるが，前章の最後で述べたように安定マッチングは指数個存在する場合があるため効率が悪い．しかし，安定マッチング全体が成す構造を利用すること

1: $(a\ \ c)\ \ (b\ \ d)$	a: 1
2: $c\ \ a\ \ e$	b: (2 1) 4
3: $b\ \ a\ \ (e\ \ d)$	c: 1 2 3 5 4
4: $c\ \ (b\ \ d\ \ e\ \ a)$	d: (5 3 1 4)
5: $c\ \ (d\ \ b)$	e: 4

図 -11　入力例 I_4

により，最小不満度安定マッチングと最小後悔安定マッチングは多項式時間（効率の良い計算時間）で求められることが分かっている．一方，男女平等安定マッチングを求める問題は NP 困難である（多項式時間アルゴリズムが存在しないと考えられる）ことが示されており，これに対する近似アルゴリズム（最適とは言わないまでも，できるだけ最適に近い解を多項式時間で見つけるアルゴリズム）も考案されている．

最大サイズ安定マッチング

安定結婚問題の最も基本的な定義では，各人は異性**全員**を **1 列**に順序付けしなければならなかった．しかし実際には，ペアになりたくない相手もいるだろうし，2 人を甲乙つけがたい場合もあるだろう．このような状況から考えられる選好リストの自然な拡張として，リストに**不完全指定**と**同順位**を許すものがある．たとえば**図 -11** の I_4 を見てみよう．

男性 3 は女性 b が第 1 希望，a が第 2 希望であり，続いて e と d が同じぐらい好きである．また，c とペアになるぐらいなら，1 人でいた方がましだと考えている．不完全指定を許しているため全員がペアを組むとは限らず，「安定性」の定義にマッチしていない人を考慮する必要があるが，「1 人でいるよりはリストに書いている誰かとペアになった方が嬉しい」という条件を追加することによって，以前と同様に定義できる．

さて，この拡張の場合，異なるサイズ（ペア数）の安定マッチングが複数存在する可能性がある．たとえば I_4 では，$\{(1, c), (4, d)\}$，$\{(1, a), (2, c),(4, d)\}$，$\{(1, a), (2, c), (4, e), (5, d)\}$ はいずれも安定マッチングであるが，サイズがそれぞれ 2, 3, 4 である．応

用を考えると，できるだけ多くのペアを作ることが望ましいため，最大サイズの安定マッチングを求めることが重要である．しかし，この問題も NP 困難であることが分かっており，最適解を求める高速なアルゴリズムは望めない．このため，性能の良い近似アルゴリズムを作るための研究が盛んに行われている．

任意の 2 つの安定マッチングのサイズが 2 倍までしか違わないことは，定義から簡単に証明できる．また，サイズを気にしなければ，安定なマッチングは簡単に求めることができる．よって，サイズが最大の半分以上ある安定マッチングを求める近似アルゴリズムは，簡単に構築できる．現在最良のアルゴリズムは，最大の 2/3 倍以上のサイズを保証するものであるが，これより良い近似が可能かどうかは今のところ分かっていない．

配属数下限付き安定マッチング問題

はじめに説明した多対 1 の安定マッチング問題を考える．各研究室は学生定員の**上限**を決めているが，この総和が全学生数に対してある程度大きかったら，人気のある研究室に多くの学生が配属される一方，人気のない研究室には学生が 1 人も来ないという状況にもなりかねない．事実, 前述したように, 日本の研修医マッチングでは定員総数 10,500 に対して研修医が 8,500 人しかおらず，多くの研修医は都市部の病院を希望するため，地方の病院に配属される研修医が少なくなるといった問題が起きている．安定マッチングは複数存在し得るのだから，できるだけ多くの人が地方の病院へ配属されるものを選ぶというのは一案だが,「どの安定マッチングでも，各病院へ配属される研修医の数は同じ」という **Rural Hospitals Theorem** と呼ばれる定理が知られており，配属人数の観点からはどの安定マッチングを選んでも同じである．

さて，この都市部集中の問題を解消するために，現在は都市部の病院の定員数を引き下げるという政策が採られている．より詳しくは，都道府県単位で定員数上限が課せられ，たとえば A 県に課せられた上限が 200 だとすると，A 県内のすべての病院の定員数の総和が 200 を超えてはいけないというものである．そして，2007 年より，主に大都市を抱える都道府県の上限が段階的に引き下げられている．その結果，2007 年の段階で総定員数約 11,500 であったのが，現在は前述の約 10,500 になっている．しかし，今なお，この都市部集中の問題は解決していないようである．

一方，より直接的な解決策として，各病院の定員数の**下限**を設定することが考えられるであろう．つまり, これまで「7 人以下」としていたところを,「3 人以上 7 人以下」のような書き方をするのである．これにより，地方の病院も最低限必要な人数を確保できるというわけである（ただし，定員数を充足させたいからといって，リストに書いてすらいない病院に無理矢理配属させることはできないので，安定性以前にそもそも解が存在しない可能性もある．その場合はどうしようもないので，ここでは定員充足が可能である場合のみを考えることにする）．このような，下限を設定するモデルの研究は最近いくつか行われているのだが，ここではそのうちの 1 つを紹介する．

まず，上下限を満たす安定マッチングが存在するか否かを判定し，存在するならばそれを求めるアルゴリズムは，以下のように構築することができる．下限を無視して上限だけを考え，（従来の方法で）安定マッチングを 1 つ求める．その安定マッチングが各病院の下限をも満たしていれば，それは求めるべき解である．もし満たしていなければ，上記の Rural Hospitals Theorem により，どの安定マッチングも下限を満たさないことが分かるので，解は存在しない．つまり，上下限を満たすどのようなマッチングも安定とはなり得ない．

しかし, たとえ安定マッチングが存在しなくとも，安定ではないまでも何らかの基準で「良い」マッチングを求めることが望まれる．安定性の定義はブロッキングペアがまったく存在しないことなので，ブロッキングペア数のより少ないマッチングを「より

安定なマッチング」と考えるのは自然な発想であろう．そこで,「すべての病院の上下限を満たすマッチングの中で，ブロッキングペア数最小のマッチングを求める」という問題が提案された．しかし，その後の研究で, この問題は NP 困難であるばかりか, 近似すら困難であることが分かった．したがって，ある程度効率の良いアルゴリズムの存在する，妥当な問題設定が望まれる．

まとめと最近の動向

本稿では，安定マッチング問題の性質や，その拡張問題に対する研究結果をいくつか紹介した．紙面の都合上，各々の結果に対する参考文献は掲載しないが，安定マッチングの教科書や解説記事をいくつか挙げておく[2)～7)]．また，マッチング理論の応用については文献 8）の後半部分に分かりやすく解説されており，特に日米における学校選択制については，文献 9）に詳しい．

アルゴリズム理論の分野では，マッチングのみならずオークションや選挙制度など，ゲーム理論や制度設計を題材とした研究が最近盛んになってきているが，今回のノーベル賞受賞でまた注目を集めることになるであろう．2012 年の夏には安定マッチングに関する第 2 回のワークショップがハンガリーのブダペストで開かれた．2008 年の第 1 回のときには，ほとんどの参加者が計算機科学の研究者であったが，今回は計算機科学者と経済学者が半々といったところであった．我々とは幾分違った経済学のアプローチに触れることができ，非常に新鮮であった．また，同年の年末にはマッチングに関する研究集会が東京で開かれ参加した．公立学校選択制度や研修医配属など，国内外の安定マッチングを使ったシステムの問題点や解決策などが発表され，まだまだ解くべき問題は多数残されているという印象を受けた．

また最近では，腎臓の交換移植にもマッチング理論が利用され，注目を集めている．たとえば A さんが，腎臓病を患う息子の a さんに自分の腎臓（のうちの 1 つ）を提供したいが，型が合わずに移植が行えないとしよう．同様に，B さんは妻の b さんに提供したいが移植が行えない（図 -12 左）．しかし，A さんが b さんに，B さんが a さんになら提供できるとする．このとき (A, a) ペアと (B, b) ペアで腎臓の交換移植を行うのである（図 -12 右）．このような，身内に提供したいが提供できない不幸なペアをたくさん集め，ペア同士のペアを作り交換移植をすることにより，移植を効率良く行おうというものである．Roth 氏はこの仕事でも中心的な役割を果たしており，今回のノーベル賞受賞の要因の 1 つとなっている．

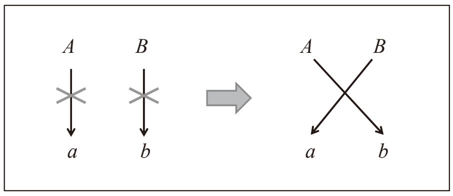

図 -12　腎臓交換移植の例

最後に，2008 年 3 月に他界された David Gale 氏の御冥福を祈りたい．もし彼が生きていたら，今回は 3 人での受賞になったのではないかと思うと，残念でならない．

参考文献

1）Gale, D. and Shapley, L. S. : College Admissions and the Stability of Marriage, Amer. Math. Monthly, Vol.69, pp.9-15 (1962).

2）Gusfield, D. and Irving, R. W. : The Stable Marriage Problem : Structure and Algorithms, MIT Press, Boston, MA (1989).

3）Manlove, D. F. : Algorithmics of Matching under Preferences, World Scientific (2013).

4）根本俊男 : 安定結婚問題，応用数理計画ハンドブック，第 14 章第 2 節，pp.779-830, 朝倉書店 (2002).

5）岩間一雄 : 安定結婚問題の数理と最近の話題，数学セミナー，pp.46-51 (Nov. 2008).

6）宮崎修一 : 安定結婚問題，電子情報通信学会誌，Vol.88, No.3, pp.195-199 (2005).

7）宮崎修一 : 安定結婚問題，伊藤大雄，宇野裕之 編著 : 離散数学のすすめ，第 17 章，pp. 232-245, 現代数学社 (2010).

8）坂井豊貴 : マーケットデザイン入門―オークションとマッチングの経済学，ミネルヴァ書房 (2010).

9）安田洋祐 : 学校選択制のデザイン―ゲーム理論アプローチ，NTT 出版 (2010).

（2013 年 3 月 26 日受付）

宮崎修一（正会員）shuichi@media.kyoto-u.ac.jp

1998 年九州大学大学院システム情報科学研究科博士後期課程修了．同年京都大学情報学研究科助手．2002 年同大学術情報メディアセンター助教授．2007 年より同准教授．離散アルゴリズムの設計および解析，組合せ最適化，計算量理論等の研究に従事．博士（工学）．