

白色化を用いた FastICA による独立成分分析

根本優花 (指導教員: 吉田裕亮)

1 はじめに

近年, 多変量解析の応用分野は多岐にわたっており, それに伴って様々な手法が開発され, 研究されている. 古くから研究され工学の分野でも広く用いられてきた主成分分析や因子分析といった手法は強力なものではあるが, これらの手法は信号の大きさに依存するのにもかわらず適切な信号の計量がわからないまま使われてしまうこともあり, 一種の危うさを感じられることもある.

本研究では, 信号の大きさに依存しない独立性という指標を用いた独立成分分析について取り扱う. 実際に独立成分分析のアルゴリズムの一種である FastICA アルゴリズムを用いて音源分離を行い, その問題点や今後どのように応用されていくのかについて考察する.

2 独立成分分析

独立成分分析が信号処理の手法として持つ顕著な特徴は, 原信号の独立性を仮定するだけで, それ以外の信号伝達送路の伝達特性などの情報は未知 (blind) とすることである. このため, 信号源が複数あり, 多点計測されたデータの解析に有効とされる. 観測点で観測される観測信号を $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ とし, 同様に n 個の発信源で発信される原信号を $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t))^T$ とする. 信号の混合を表す実数行列を A とおき, この A を用いて $\mathbf{x}(t)$ と $\mathbf{s}(t)$ の関係式を表すと

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{s}(t)$$

となる.

上で述べたように観測信号 $\mathbf{s}(t)$ と A は未知であり, わかっているのは原信号 $\mathbf{x}(t)$ のみである. このような問題のことを BSS (Blind Source Separation) 問題といい, 独立成分分析が扱う問題の多くは BSS 問題である. この問題は, 復元作用素 W を用いて観測信号 $\mathbf{x}(t)$ から復元信号 $\mathbf{s}(t)$ を

$$\mathbf{s}(t) = W\mathbf{x}(t)$$

によって構成したとき, 復元信号の各成分 $s_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ が互いに独立となるように復元作用素 W を求める問題と言い換えられる.

3 白色化

白色化とは, 適当な線形変換によって信号の各成分を無相関化することである. この適当な線形変換を,

$$\mathbf{z} = D^{-\frac{1}{2}}E^T\mathbf{x}$$

とし, \mathbf{z} を白色化信号とする. ここで, D は \mathbf{x} の分散共分散行列の固有値からなる対角行列 $D = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ であり, E はその固有ベクトルからなる直交行列である. 本研究では, 白色化を行うことで信号の前処理を行い, 信号を無相関とした上で無相関性を保証する行列の中で解を探索することを行った.

4 FastICA アルゴリズム

FastICA アルゴリズムは, 混合信号が事前に白色化されることを前提に成分推定を行う ICA の高速アルゴリズムである. FastICA アルゴリズムでは独立性の評価関数として尖度を用い, その評価関数を不動点法を用いて動かすことによって最大・最小化問題を解く.

4.1 尖度

尖度は, 平均まわりの 4 次モーメントを標準偏差で正規化したものである. 4 次のキュムラントと関連が深い. 尖度は計算の簡便さや低次で外れ値に対する頑健性などから多くの場面で用いられている. 一般論において, 確率変数 X の平均値が 0 であるとき, X の尖度 $K(X)$ は以下のような式で表される.

$$K(X) = E\{X^4\} - 3[E\{X^2\}]^2$$

4.2 不動点法

ベクトル $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$ の関数 $\psi(\mathbf{w})$ を $\|\mathbf{w}\| = 1$ という条件の下で最小化する条件付き最適化問題を考える. この問題はラグランジュの未定係数法を用いて,

$$L(\mathbf{w}, \lambda) = \psi(\mathbf{w}) + \lambda(\|\mathbf{w}\|^2 - 1)$$

の極値を求める問題に書き換えられる. したがって, 各 w_i の満たすべき条件は

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{w})}{\partial w_i} + 2\lambda w_i = 0$$

である. これを第 2 項の w について解いて

$$\mathbf{w} = -\frac{1}{2\lambda} \nabla \psi(\mathbf{w})$$

となる. ただし,

$$\nabla \psi(\mathbf{w}) = \left(\frac{\partial \psi(\mathbf{w})}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial \psi(\mathbf{w})}{\partial w_n} \right)^T$$

である. \mathbf{w} は $\|\mathbf{w}\| = 1$ で正規化されているので, λ を求めるには単に正規化すれば良い. 以上より \mathbf{w} を求めるための更新則は

$$\mathbf{w} \leftarrow -\frac{\nabla \psi(\mathbf{w})}{\|\nabla \psi(\mathbf{w})\|}$$

となり, 収束点が求める極値となる. この繰り返し則によって極値を求める方法を不動点法という.

4.3 本研究で実際に実装したアルゴリズム

1. 観測値 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ を白色化によって得られる信号を $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$ とおく.
2. 初期値 \mathbf{w}_0 を乱数によって定め, $\|\mathbf{w}_0\| = 1$ とする.
3. $\mathbf{w}_k = (w_{k_1}, w_{k_2})^T$ としたとき,

$$\mathbf{w}_{k+1} = 4(E[E\{w_{k_1}z_1 + w_{k_2}z_2\}^3z_1],$$

$$E[E\{w_{k_1}z_1 + w_{k_2}z_2\}^3z_2])^T - 3\mathbf{w}_k$$

を用いて \mathbf{w} の方向を動かす.

- 新しく得られたベクトル w_{k+1} を $\|w_{k+1}\| = 1$ として正規化する.
- $|w_{k+1}^T w_k|$ が 1 に収束したら終了. していなければ, $k = k + 1$ として 3. に戻る.

5 実験概要

今回は音源分離をする原信号は, 図 1 に示す 100Hz と 200Hz の正弦波を加算した波形 s_1 と図 2 に示すノイズ混じりの波形 s_2 である.

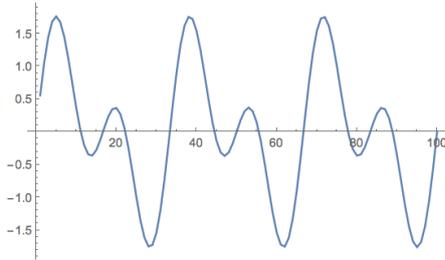


図 1 : 原信号 s_1



図 2 : 原信号 s_2

s_1 と s_2 をそれぞれ確率ベクトルとし, $s = (s_1, s_2)^T$ とする. 混合行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.9 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix}$$

とし, A をつかって原信号を混合させ, 観測信号 $x = (x_1, x_2)^T$ を生成し, 実験の対象とする.

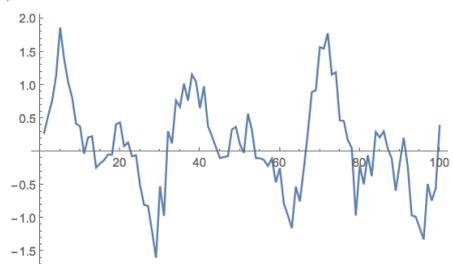


図 3 : 観測信号 x_1

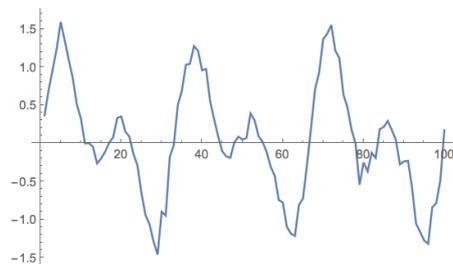


図 4 : 観測信号 x_2

6 実験結果

先に述べたアルゴリズムを用いて観測信号 $x = (x_1, x_2)^T$ を対象に実験を行った結果, 以下の波形が得られた.

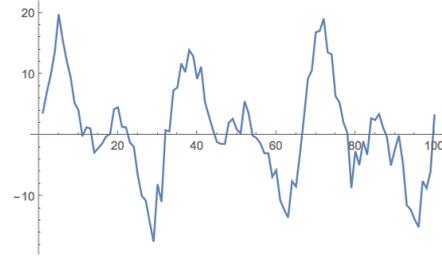


図 5 : 復元信号 s'_1

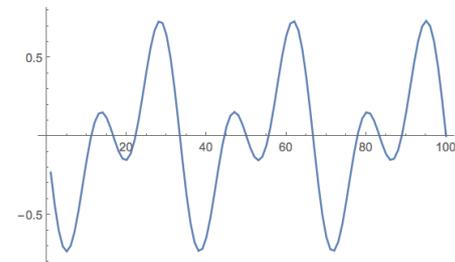


図 6 : 復元信号 s'_2

復元信号 s'_2 の正負が逆になっているが, ここではノイズを除去し正弦波を取り出すことが目的であるため本質的な問題では無い. 今回の実験の目的である原信号を取り出すことに成功したといえる.

7 考察と今後の展望

本研究では FastICA アルゴリズムを用いて音源分離を行った. 名前にも 'fast' とついているように $|w_{k+1}^T w_k|$ の 1 への収束は大変早く, $k = 2$ で収束するとう場合もあった. 問題点としては, 事前に観測信号の白色化を行うことを前提としたアルゴリズムであるため少々手間がかかるという点と, アルゴリズム内で得られたベクトル w を復元作用素 W に変換する処理が必要という点である. これらの問題点を解消するためには不動点法を適用する際に今回はベクトル関数を扱ってからあとで行列に変換するという方法をとったが, 初めから行列関数へ拡張したアルゴリズムを作り, 直接に復元作用素を求めてしまうという方法が考えられる. また最適化基準にランダム行列をつかって新たなアルゴリズムを作成できないかなど, 今後検討していきたい.

参考文献

- 村田昇「入門 独立成分分析」東京電機大学出版,2004
- 五反田博, 石橋孝昭, 岩崎宣生, 井上勝裕「独立成分分析の基礎と応用」<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1743-02.pdf>
- 芝野泰章, 市毛勝正「独立成分分析による音源分離に関する検討」https://ci.nii.ac.jp/els/contentscinii_20171207162150.pdf?id=ART0009925010