

# 集団の歩行同期による橋の異常振動：モデル化と解析

松尾早紀 (指導教員：郡宏)

## 1 はじめに

ロンドンにあるミレニアム・ブリッジは、開通日に大きな横揺れが発生したことにより、一時的に閉鎖した。先行研究 [1] では、この横揺れの現象をモデル化し、解析している。この橋の横揺れは、当初橋の革新的なデザインが原因と思われていたが、先行研究では、生物振動子の集団同期の考え方を採用し、橋の揺れと群衆の同期の両方を考慮している。著者らによると、橋の揺れと群衆の同期は、ある不安定性のメカニズムの2つの側面として現れているものであり、切り離して考えることは出来ない。

この先行研究の解析により、橋の揺れと群衆の同期は、群衆の大きさがある臨界値に達したら現れることが示された。また、その臨界値を解析的に導出している。

しかし、この先行研究で用いられている歩行者の方程式は、周期的な外力に対して同期可能な非線形システムの近似を元に考えられたものであり、あくまで仮定である。そこで、本研究では、より力学的に妥当なモデルを考え、解析を行った。

## 2 モデル

本研究では、以下のモデルを使用した。

$$\frac{d^2 B}{dt^2} = -\epsilon \sum_{i=1}^N \frac{d^2 x_i}{dt^2} \quad (1)$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = F(x_i, \frac{dx_i}{dt}) - k \frac{d^2 B}{dt^2} \quad (2)$$

式 (1) は橋の横揺れの様子を表しており、式 (2) は歩行者の足取りの様子を表している。ここで、変数  $B(t)$  は橋の横方向の位置、変数  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) は歩行者の横方向の位置、パラメータ  $N$  は歩行者数である。

このモデルでは、橋の運動方程式には歩行者  $x_i(t)$  の慣性  $\ddot{x}_i(t)$  の和  $\sum_{i=1}^N \ddot{x}_i(t)$ 、歩行者の運動方程式には橋の  $B(t)$  の慣性  $B(t)$  をそれぞれ右辺から引くことによって、相互作用するようにしており、 $\epsilon$  と  $k$  はそれぞれの相互作用の強度を表すパラメータである。 $\epsilon$  は歩行者の重さに比例しており、相対的に橋が軽くなると、相互作用が強くなる。

また、関数  $F(x, \dot{x})$  は、歩行者  $x_i(t)$  が単体で示す挙動の運動方程式である。本研究では、関数  $F(x, \dot{x})$  として次の関数を用いて腰の周期的横揺れを記述する。

$$F(x, \frac{dx}{dt}) = -\eta \frac{dx}{dt} - \omega_x^2 x_i - \alpha_x x_i^2 \frac{dx_i}{dt} \quad (3)$$

ここで、 $\omega_i$  は歩行者  $x_i(t)$  の固有振動数、 $\eta$  は減衰定数、 $\alpha_x$  は非線形減衰の大きさを表すパラメータである。このモデルでは減衰定数を  $\eta = -1.0$  に設定することによって、歩行者が腰に行うエネルギー注入を記述している。

## 3 シミュレーション結果

式 (1), (2) を整理すると、次の方程式を導出することが出来る。

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = M_{\text{inv}} \{ (1-a) F_i + a F_{\text{other}} \} \quad (4)$$

ただし、 $a = k\epsilon$ ,  $M_{\text{inv}} = \frac{1}{1-2a}$ ,  $F_i = F(x_i, \frac{dx_i}{dt})$ ,  $F_{\text{other}} = \sum_{j=1}^N F(x_j, \frac{dx_j}{dt}) - F_i$  とおいた。

本研究では、解析の際に歩行者の方程式として式 (4) を用いた。

$\epsilon = 0.4$ ,  $\alpha_x = 1.0$ ,  $\omega_i$  は平均  $2\pi$ , 分散 1.0 のガウス分布に従う乱数,  $N = 300$  とし、各歩行者の重さに比例する結合強度  $a$  を様々な値で固定して、オイラー法を用いてシミュレーションを行った。ただし、歩行者はシミュレーションを開始して 250 秒経過した時点から橋の上を歩き出すようにしている。

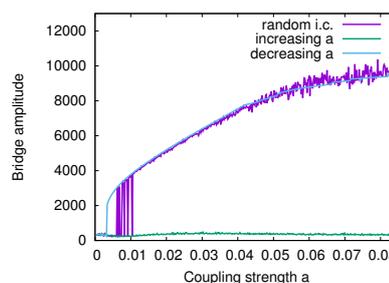


図 1: 縦軸は橋の揺れの振幅  $B_{\text{max}}$ , 横軸は結合強度  $a$ .

結合強度  $a$  の値によって橋の揺れの振幅  $B_{\text{max}}$  がどのように変化するかを、図 1 に示した。ここで、橋の揺れの振幅  $B_{\text{max}}$  とは、過渡過程後に計測した  $B(t)$  の最大値のことである。図 1 において緑と水色は履歴があるの時の結果であり、緑は結合強度  $a$  を増加させ、水色は  $a$  を減少させている。紫は履歴がない時の結果であり、歩行者の初期条件として平均 0, 分散 1 のガウス乱数を用いている。

図 1 より、橋の揺れは結合強度  $a$  の変化経路に依存していることが分かる。このような現象をヒステリシスという。

また、図 1 において、橋と歩行者集団の挙動はどのようになっているのかを観察した。図 2 は、履歴がない時の、 $a = 0.003$ ,  $0.01$  のそれぞれの場合の橋の揺れの挙動を示している。

図 2 より、履歴がない時、 $a = 0.003$  の時は橋はほとんど揺れていないが、 $a = 0.01$  の時は橋が揺れていることが分かる。

図 3 は、各歩行者について  $\dot{x}_i > 0$  で  $x_i = 0$  となる時刻 (つまり、各歩行者の振動が発生した時刻) を計測し、点で表示したラスタプロットである。図 3a は履歴なしで  $a = 0.003$  の時 (つまり、橋がほとんど揺れていない時) の全歩行者の様子を、図 3b は履歴なしで

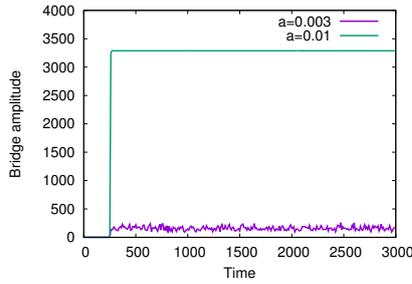
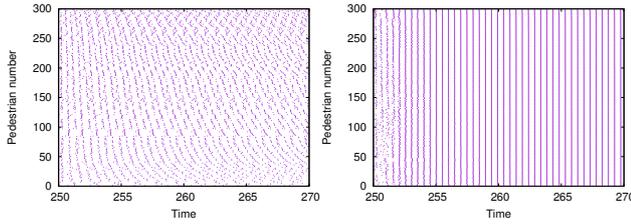


図 2: 紫は結合強度  $a = 0.003$ , 緑は  $a = 0.01$  である。縦軸は橋の揺れの振幅  $B_{\max}$ , 横軸は時間。

$a = 0.01$  の時 (つまり, 橋が揺れている時) の全歩行者の様子を示している。



(a) 結合強度  $a = 0.003$  (b) 結合強度  $a = 0.01$

図 3: 全歩行者のラスタ表示。縦軸は歩行者の番号, 横軸は時間。

図 3 より, 橋がほとんど揺れていない時は, 歩行者集団はいくつかにクラスター化しているものの, 完全には同期しておらずバラバラに歩いていることが分かる。また, 橋が大きく揺れている時は, 歩行者集団の歩行が同期していることが分かる。全歩行者の歩様は, 時間が経過しても変化はあまり見られなかった。

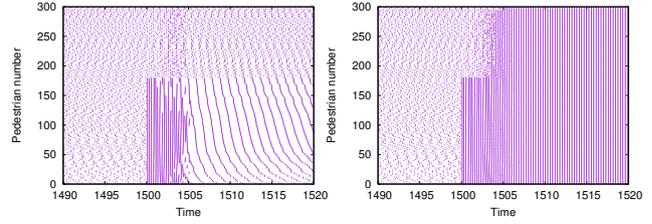
次に, 橋が揺れていない時にどれくらいの割合の歩行者が同一クラスターになると橋が揺れ出すのかを知るために, シミュレーションを行った。もともとは橋が揺れていない, 履歴なしで結合強度  $a = 0.003$  の時と, 履歴ありで結合強度  $a = 0.05$  の時において, 時間が 1500 秒経った時点で手を加えてある割合の歩行者の歩様を同じにして, 全歩行者の様子がどうなるかを観察した。以下, 歩様を同じにする人数のことを  $N_s$  と記述する。

履歴なしで結合強度  $a = 0.003$  の時は,  $N_s$  が大きくても, 時間が経つと歩様がバラバラになり橋は揺れない様子が観察できた。

一方, 履歴ありで結合強度  $a = 0.05$  の時は,  $N_s$  が 180 以下の時は歩行者は同期しないが, 181 以上になると歩行者が同期し, 橋が急激に揺れ始める様子が観察できた。

図 4a は  $N_s = 180$  の時の, 図 4b は  $N_s = 181$  の時の全歩行者のラスタ表示である。手を加える直前の 1490 秒からの様子を示している。

また,  $N_s$  として様々な値を取ってシミュレーションをした時の橋の揺れの様子を図 5 に示した。紫が  $N_s = 150$ , 緑が 170, 水色が 175, オレンジが 180, 黄色が 181, 青が 185 である。



(a)  $N_s = 180$  (b)  $N_s = 181$

図 4: 全歩行者のラスタ表示。縦軸は歩行者の番号, 横軸は時間。

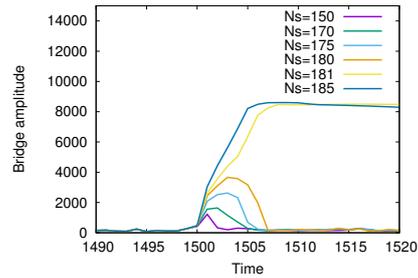


図 5: 縦軸は橋の揺れの振幅  $B_{\max}$ , 横軸は時間。

図 4, 5 より, 同期している歩行者がある臨界サイズを超えると, 橋が揺れ出し, やがて全歩行者が同期する様子が観察できた。

また, 履歴なしで結合強度  $a = 0.003$  の時は,  $N_s$  が大きくても歩行者は同期せず橋は揺れないが, 履歴ありで結合強度  $a = 0.05$  の時は,  $N_s$  が 180 を超えると歩行者が同期し橋が揺れる様子が観察できたが, これは, 結合強度  $a$  の大きさが関係していると思われる。

#### 4 まとめと今後の課題

本研究では, 歩行者集団の歩行同期によって発生する橋の横揺れの現象を表すモデルを作成し, 各パラメータの値によって挙動がどのように変化するのかを解析を行うことによって考察した。履歴がない時は, 結合強度  $a$  がある値を超える (ここでは  $a = 0.005$  辺り) と, 歩行者集団の歩行が同期し, 橋が揺れるようになることが分かった。また, 履歴がある時は, 橋は何もなければ大きく揺れだすことはないが, 何らかの刺激により歩行者が同期し始めると (例えばふざけて誰かが橋を揺らすように歩く等), 橋は急激に揺れ始めるようになることが分かった。

現在このモデルは歩行者の歩様がバラバラな状態と歩様が同期している状態の両方が安定解になっていると考えられるが, 今後, その安定性解析を行いたい。また, 橋にどのような工夫をすると歩行者集団の同期が起こりづらくなるのか, 考察したい。

#### 参考文献

- [1] Steven H. Strogatz, Daniel M. Abrams, Allan McRobie, Bruno Eckhardt, and Edward Ott. Crowd synchrony on the millennium bridge. *Nature*, Vol. 438, pp. 43–44, November 2005.