

周期が大きく異なるリズム集団のシンクロ

加藤 由里子 (指導教員：郡 宏)

1 はじめに

同期現象とは、固有には振動周期が異なる複数の振動子において、なんらかの相互作用によって振動のタイミングが一致することである。一方の振動子が1回振動する間に他方の振動子がちょうど1回振動することを1:1同期と呼び、一方の振動子が m 回振動する間に他方の振動子がちょうど n 回振動することを $m:n$ 同期と呼ぶ(ただし、 m と n は互いに素な整数とする)。

同期は脳による情報処理で重要な役割を持つと考えられている。記憶や空間認識能力を司る脳の部位である海馬において、学習機能が強化されているときや作業記憶が働いているときに約4Hzの脳波と θ 波と呼ばれる脳波が同期することが先行研究によって分かっている[1]。 θ 波は約8Hzの波で、約4Hzの波が1回振動する間に θ 波が2回振動しており、この同期は1:2同期である。

本研究では、1:2同期の理論研究のため、細胞の電気的活動を表したFitzHugh-南雲モデル[2]と、位相のみで記述されるが神経科学的な解釈がしやすいWinfreeモデル[3]と、それをさらに簡略化した蔵本モデル[4]でシミュレーションと理論解析を行い、その結果を比較した。

2 使用する3つのモデル

FitzHugh-南雲モデル(以後、FHNモデルと表す)は

$$\dot{x}_i = (x_i(x_i - a)(x_i - 1) - y_i)\mu_i + \kappa(\bar{x} - x_i) \quad (1)$$

$$\tau \dot{y}_i = (x_i - by_i)\mu_i \quad (2)$$

蔵本モデルは

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{\kappa}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi_i) \quad (3)$$

Winfreeモデルは

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{\kappa}{N} \sum_{j=1}^N (-\sin \varphi_i)(1 + \cos \varphi_j) \quad (4)$$

で与えられる。

各モデルの κ は各振動子間の結合の強さを表している。蔵本モデルとWinfreeモデルの φ_i ($i = 1, \dots, N$)は振動子の位相、 ω_i は振動子の固有振動数を表している。蔵本モデルとWinfreeモデルは位相振動子モデルとも呼ばれる。FHNモデルは、神経細胞の電気的活動を詳細に記述したHodgkin-Huxleyモデルを単純化したモデルで、FHNモデルの x_i は神経細胞 i の電位を表す。ここでは、周期的に発火をする、すなわちリミットサイクルとなるパラメータ値($a = -0.1, b = 0.5$)を選んでいく。 μ_i は各神経細胞の固有な振動周期を決めるパラメータである。弱く相互作用するリミットサイクルは、位相縮約理論によって位相振動子モデルに単純化でき、Winfreeモデルはその一例である。Winfreeモデルにおいて、結合強度 κ が十分小さく、また、1:1同期が起こる状況を仮定すると、蔵本モデルが導出される[2]。これらの3つのモデルを比較すると、表1のようになる。

モデル	扱える同期	解析の難易度
FHNモデル	1:1同期と $m:n$ 同期	非常に難しい
蔵本モデル	1:1同期のみ	易しい
Winfreeモデル	1:1同期と $m:n$ 同期	やや難しい

表1: モデルの比較

3 各モデルのシミュレーション結果の比較

100個の振動子で、固有振動数を区間 $[1 - \gamma : 1 + \gamma]$ の一様分布からランダムに選んでシミュレーションを行った。

まず、固有振動数の分布の幅 γ を固定し、結合強度 κ を増加させたときの各振動子の平均振動数 $\langle \omega_i \rangle$ を調べた。

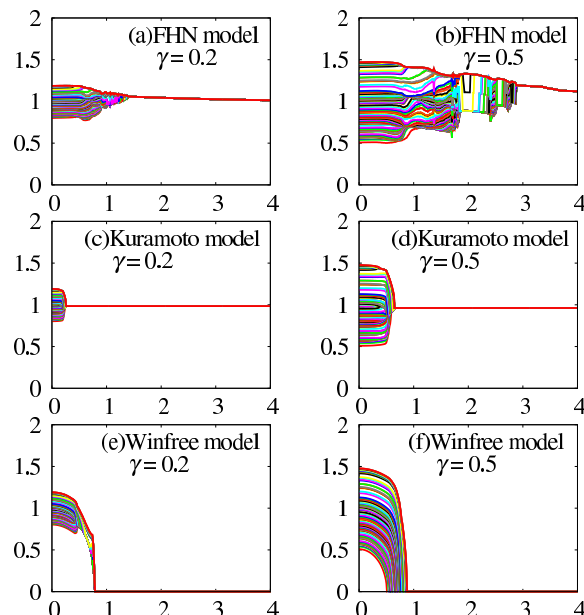


図1: γ を固定して κ を増加させたときの各振動子の平均振動数の変化。縦軸は $\langle \omega_i \rangle$ 、横軸は κ 。

図1より、 $\gamma = 0.2$ のときはどのモデルでも集団全体の振動数同期が起きている。FHNモデルは集団全体の振動数同期が起きる前に振動数同期しているクラスターの生成消滅を繰り返している。蔵本モデルは集団全体の同期後も振動し続けているが、Winfreeモデルは集団全体の同期後に振動停止が起きている。ところが、 $\gamma = 0.5$ のときはモデル間で振動子集団の様子が大きく異なる。FHNモデルは1:2同期するクラスターの生成消滅の後に集団全体の振動数同期が起きている。蔵本モデルは $\gamma = 0.2$ のときのように集団全体の振動数同期が起きるが、Winfreeモデルは集団全体で振動数同期することなく固有振動数の小さい振動子から振動停止する。

図1より、 κ だけでなく γ の値によっても集団の同期の様子が異なることが分かったので、これらの値によって集団がどのような状態をとるか調べた結果が図2である。振動子集団全体が同期して振動していれば

Locking, 同期して振動停止していれば Death, 一部の振動子が同期して振動していれば Partial locking, 同期して振動停止していれば Partial death, それ以外の場合を Incoherent とした.

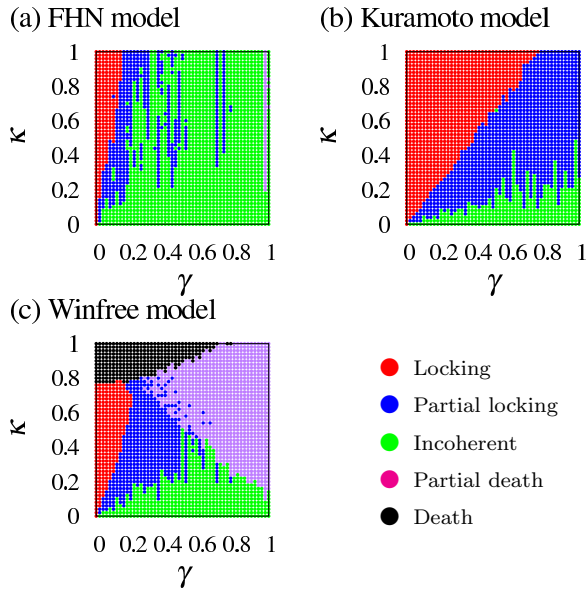


図 2: 振動子集団がとる状態を表した相図.

Partial locking しているときの振動子集団の振動数を見てみると, FHN モデルでは 1:2 同期や 1:3 同期が起きていた. パラメータによっては 1:2 同期も起きることが分かったので, 解析ができる Winfree モデルでさらにシミュレーションを行った.

4 Winfree モデルの $m:n$ 同期

Winfree モデルの $m:n$ 同期を詳しく調べるため, 振動子の個数を 2 つのとした. この系は,

$$\dot{\phi}_1 = (1 - \gamma) + \kappa(-\sin \phi_1)(1 + \cos \phi_2) \quad (5)$$

$$\dot{\phi}_2 = (1 + \gamma) + \kappa(-\sin \phi_2)(1 + \cos \phi_1) \quad (6)$$

で与えられる. このときの相図は図 3(a) である.

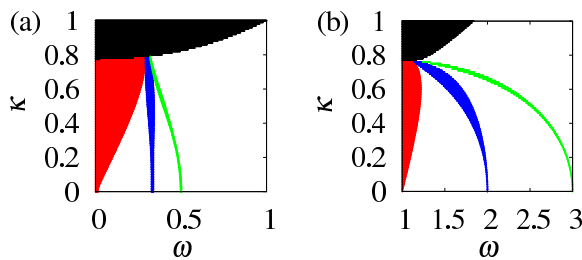


図 3: 2 つの Winfree モデルがとる状態を表した相図.

● 1:1 同期, ● 1:2 同期, ● 1:3 同期, ● 振動停止

図 3(a) より, 2 個の Winfree 振動子でも 1:2 同期が起きていることが確認できた. 100 個の場合では起きなかった 1:3 同期が 2 個の場合では起きることが分かったので, Winfree モデルで 1:2 同期が起きる理由を以下のように考察した.

1:2 同期が起きているときの振動子集団の大きさをみると, 振動数の小さい振動子集団は大きく, 振動数の大きい振動子集団は小さいので, 各集団をそれぞれ振動数 1 と ω を持つ振動子とし, 集団のサイズを

$1 - q : q$ (q が十分小さいとする) とすると,

$$\dot{\phi} = 1 + \kappa(-\sin \phi)(1 + \cos \phi) \quad (7)$$

$$\dot{\phi}_2 = \omega + \kappa(-\sin \phi_2)(1 + \cos \phi) \quad (8)$$

に近似できる. さらに, 遅い振動子をスムーズな振動に変形すると, 1:2 同期だけでなく 1:3 同期の成分が現れた. この近似が妥当であるか確認するため, 式 (7) と (8) で数値計算を行った. このときの相図は図 3(b) である. 式 (7) と (8) の数値計算結果にも 1:2 同期や 1:3 同期が現れているので, この近似は妥当であり, 元の Winfree モデルに 2 次の平均化近似を適用したものと考えられる.

5 まとめと今後の課題

同期理論の研究には 1:1 同期を扱ったものが多く, 蔵本モデルがよく用いられる. 図 1(b) と (d) を見ると, 結合強度 κ を増加させたとき, FHN モデルは $m:n$ 同期が起きながら集団全体で振動数同期するが, 蔵本モデルは集団全体が徐々に振動数同期して 1:1 同期のみ起きている. 蔵本モデルは解析しやすいが, 振動数の分布の幅が広いと数値計算結果が不完全になることが分かった.

脳波の 1:2 同期の理論研究のため, 各モデルで $m:n$ 同期が起きるパラメータ値を探したところ, FHN モデルでは 1:2 同期, Winfree モデルでは 1:2 同期と 1:3 同期が起きることが分かった. FHN モデルは解析が難しいため, Winfree モデルで $m:n$ 同期の解析を行った. Winfree モデルの位相方程式には 1:1 同期の成分しかないが 1:2 同期や 1:3 同期が起きる原因を明らかにするため, 2 次の平均化近似を行って 1:2 同期や 1:3 同期の成分を持つ位相方程式を導出した. その位相方程式より, 1:1 同期, 1:2 同期, 1:3 同期が起きる条件を求めることができた. 解析的に求めた同期条件と数値計算で得た同期条件は κ が小さい領域でよく一致していた. しかし, 振動停止の条件は求められていないので, 今後は振動停止の条件を解析的に求める方法を見つけ, Winfree モデルの同期現象についての更なる知見を深めたい.

参考文献

- [1] Shigeyoshi Fujisawa and György Buzsáki. A 4 hz oscillation adaptively synchronizes prefrontal, vta, and hippocampal activities. *Neuron*, Vol. 72, No. 1, pp. 153–165, 2011.
- [2] 郡宏, 森田善久. 生物リズムと力学系. 共立出版, 2011.
- [3] J.T. Ariaratnam and S.H. Strogatz. Phase diagram for the winfree model of coupled nonlinear oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 86, No. 19, pp. 4278–4281, 2001.
- [4] Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, and Jürgen Kurths. 同期理論の基礎と応用: 数理科学, 化学, 生命科学から工学まで. 丸善, 2009. 徳田功 訳.