平面グラフの分散彩色アルゴリズム

菊池 智子　(指導教員：萩田真理子)

1　はじめに

彩色 c を持つ連結グラフ $G=(V,E)$ において、同じ色を与えられた二点間の距離の最小値を cd とおく。すなわち、$d(v_a,v_b))$ をに二点 v_a,v_b 間の距離としたときに、

$$cd = cd(c) := min\{d(v_a,v_b)|c(v_a)=c(v_b), v_a \neq v_b\}$$

与えられたグラフ G と色数 K に対して、この cd を最大にするような彩色を「G の K 色による最適な分散彩色」と呼ぶことにする。このときの値 cd を $cd(G,K))$ と表す。

$$cd(G,K) := max\{cd(c)|c \text{ は } G \text{ の } K-\text{彩色}\})$$

また、K 色で彩色されたグラフ G 上で、距離 d 以下のどの二点も異なる色を与えられているとき、この彩色を「 G の K 色による $d-$ 分散彩色という。

一般に、任意のグラフ G に対する最適な分散彩色は明らかでない。つまり、グラフ G と色数 K が与えられたとき、G の K 色による最適な分散彩色における距離 cd は明らかでない。また、グラフ G と距離 d が与えられた場合にも、G に対して $d-$ 分散彩色をするに必要十分な色数は明らかでない。

そこで、グラフ G が与えられた時、K 色を指定した場合にできるだけ cd が可能な限り最大になるようなアルゴリズムを考えることを第一の目標とする。また、更にその分散彩色に使われている K 色が、できうる限り均等に美しく彩色されるという特徴をそのアルゴリズムに付与する、ということを第二の目標とする。

つまり、この右図のエルマーのような彩色を理想とする。

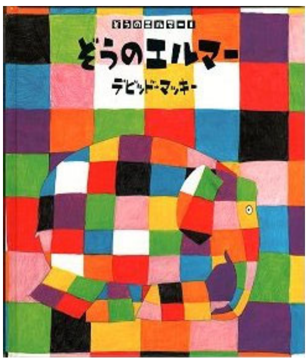

図 1: 2 理想的なエルマーのぞう

2　エルマーをグラフにする

エルマーを日本地図のように、各色毎にラインで仕切り、各ブロックを 1 つの点と考え、隣接及び しているブロックを次数として数える。

すると、次のようになった。

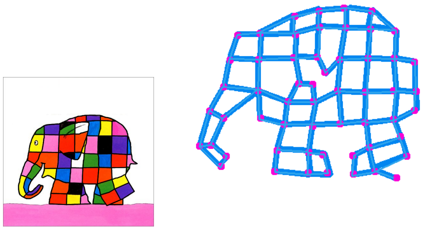

図 2: エルマーの輪郭

3　ウェルシュ・パウエルのアルゴリズム

与えられたグラフを比較的少ない色数で彩色するアルゴリズムとして、ウェルシュ・パウエルのアルゴリズムが一般的には良く知られている。

ウェルシュパウエルとは、隣接する各点を異なる色で彩色するアルゴリズムである。このアルゴリズムの利点は少ない色数で彩色を行える点である。

[ウェルシュ・パウエルのアルゴリズム]
グラフ G で、次数の大きな点から順に使える、一番小さな番号で彩色していく。

入力：グラフ G

1. $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,....,v_n\}$ が、
   $d(v_1)\geq d(v_2)\geq ...d(v_n)$　を満たすように並べ替える。
2. $i=1$ とする。
3. $c=1$ とする。
4. v_i の隣接点で色 c を持つものが存在しなければ、v_i に色 c を与えて 5 へ進む。
5. $c=c+1$ として 3 に戻る。
6. $i<P$ ならば、$i=i+1$ として 2 に戻る。
   $i=P$ ならば終了。

出力：G の点彩色

これを実装すると、次のようになる。

ただし、この場合、色数 K を小さくすることを目標にしているため、一番目の色だけが出てきてしまうことになる。
また、色数が多い時には、使用されない色が多数存在する可能性がある。

4　分散彩色アルゴリズム１

分散彩色アルゴリズムは、ウェルシュ・パウエルでの色数の偏りの可能性を軽減するアルゴリズムである。予め用意されたグラフに対し、各点の距離 d にある点を全て結んだ後に、ウェルシュ・パウエルで彩色する。

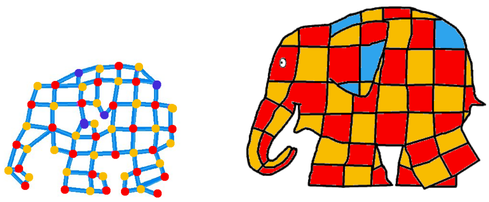

図 3: 彩色結果

すると、少なくとも距離 d までは同色が使用されることはない。
予め用意されたグラフに対し、まず、ウェルシュパウエルのアルゴリズムで色数 K を調べる。その色数 K が最小の必要な色数となる。
下図はもとのグラフから距離 2、3 まで結んだグラフである。

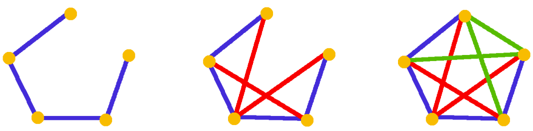

図 4: 5 点のグラフの例

図における左上の 5 点のグラフはウェルシュ・パウエルで彩色すると 2 色必要となる。
次に、右上のグラフは距離 2 を全て結んだグラフであるが、これをウェルシュ・パウエルで彩色すると 3 色必要となる。
最後に、距離 3 で結んだグラフが下図になるが、例となるグラフが小さいために完全グラフとなる。結果として、彩色数は 5 となる。
距離 d を大きくすると、いずれは完全グラフになり、点の数だけ彩色数が必要となるので、は予め指定する。

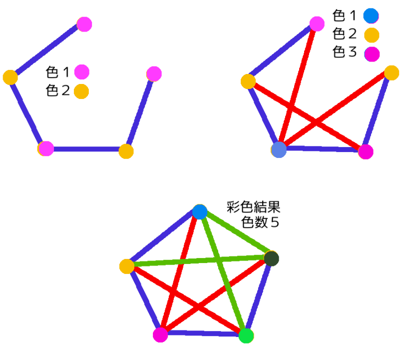

図 5: 5 点のグラフの彩色の例

アルゴリズムを実装する際に必要なグラフは、グラフ G の点の数 $|V| = n$ に対して二点のペアを作り、その二点間に辺を作るか否かをランダムに決めて表示するものとする。つまり、例にすると、このようになる。
例：$edge[0][1] = 1$ ならば、頂点 0、1 の間には辺がある。

挿入：グラフ G

1. $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ が、
   $d(v_1) \geq d(v_2) \geq ...d(v_n)$ を満たすように並べ替える。
2. $i = 1$ とする。
3. $j = 1$ とする。
4. $d = 1$ とする。
5. 入力されたグラフの点 v_i と同色であり、かつ距離 d 以下の点を繋いだグラフ $G^{\star}$ を作る。
6. グラフ $G^{\star}$ の各点を異なる色を使って彩色する。
7. $d = d + 1$ として、5 に戻る。
8. 色数 $K = c_j$ と等しくなったら、終了。

これをエルマーの図で実装すると以下のようになった。

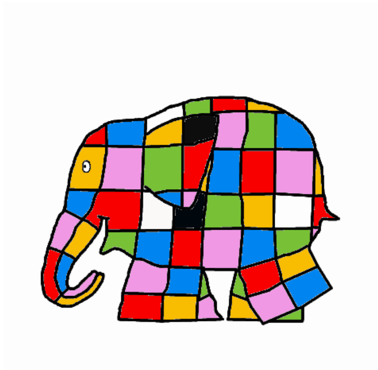

図 6: 距離 2 までを結んだグラフを分散彩色アルゴリズムで彩色した結果

このアルゴリズムだと、彩色した結果、色 c_1 が 1 番多く使われることになり、第 1 の目標を満たしているが、第 2 の目標を満たすことができない。

5　まとめと今後の課題

与えられたグラフに対する色数が指定されている場合、ウェルシュパウエルのアルゴリズムの最低限の色数ではなく、できるだけ多くの色数を分散して彩色できるアルゴリズムを作った。
エルマーを例にすると、各点から距離 2 を繋いだだけでも、色数は 3 から 7 に増大した。
今後は、各距離とグラフの彩色数の関係性なども考察していきたい。
今後は、より美しい分散彩色のアルゴリズムを考察したい。

参考文献

[1] Proofs from THE BOOK
M.Aigner, G.M.Ziegler