グラフの分散彩色数の評価

小川知世 (指導教員：萩田真理子)

1 はじめに

グラフの点集合を定義域とする写像で，距離 d 以下の任意の二点の像が異なるものを d 分散彩色，終集合の要素数が k 以下のものを k 彩色という。G と d に対して，G の d 分散 k 彩色が存在する最小の k を $\chi(G,d)$ で表し，G の d 分散彩色数と呼ぶ。

$$\mathrm{cb}(c) := \sup\{\, b \mid 0 < d(v,w) \le b \Rightarrow c(v) \ne c(w) \,\}$$
$$\mathrm{cb}(G,k) := \max\{\, \mathrm{cb}(c) \mid D(c){=}V(G)\,,\, |T(c)| \le k \,\}$$
$$\chi(G,d) := \min\{\, |T(c)| \mid D(c){=}V(G)\,,\, \mathrm{cb}(G,c) \ge d \,\}$$

グラフの集合にも，次のように cb, χ を定義する。

$$\mathrm{cb}(\mathscr{G},k) := \min\{\, \mathrm{cb}(G,k) \mid G \in \mathscr{G} \,\}$$
$$\chi(\mathscr{G},d) := \max\{\, \chi(G,d) \mid G \in \mathscr{G} \,\}$$

G での距離が d 以下の全ての二点をつないだグラフを G^d，$\{\, G^d \mid G \in \mathscr{G} \,\}$ を $\mathscr{G}^d$ で表す。また，$\Delta(\mathscr{G}) := \max\{\, \Delta(G) \mid G \in \mathscr{G} \,\}$, $\omega(\mathscr{G}) := \max\{\, \omega(G) \mid G \in \mathscr{G} \,\}$ とする。但し，$\Delta(G)$ は G に含まれる最大の完全グラフの位数，$\omega(G)$ は G の頂点の次数の最大値である。

最大次数が $\varDelta$ 以下のグラフ, 平面的グラフ全体をそれぞれ $\mathscr{G}(\varDelta), \mathscr{H}(\varDelta)$ と表す事にする。

$$\mathscr{G}^d(\varDelta) := \{\, G^d \mid \Delta(G) \le \varDelta \,\}$$
$$\mathscr{H}^d(\varDelta) := \{\, H^d \mid \Delta(H) \le \varDelta\,,\, H : \mathrm{planar} \,\}$$

2 彩色数に関係する性質

$$\chi(\{G\},d) = \chi(G,d) = \chi(G^d,1) = \chi(G^d)$$
$$\mathrm{cb}(\mathscr{G},k) \ge d \Leftrightarrow \chi(\mathscr{G},d) \le k$$
$$\mathrm{cb}(\mathscr{G},k) < d \Leftrightarrow \chi(\mathscr{G},d) > k$$

2.1

位数 n の完全グラフが G^d の部分グラフならば，G の d 分散彩色は n 以上である。

$$\omega(\mathscr{G}^d) \le \chi(\mathscr{G},d) \tag{1}$$

G の頂点を，どの点も自分より前の距離 d 以下の点が k 個以下になるように並べる事ができれば，G には d 分散 $k{+}1$ 彩色がある。特に，$\chi(G,d) \le \Delta(G^d)+1$ 。

$$\chi(\mathscr{G},d) \le \Delta(\mathscr{G}^d)+1 \tag{2}$$

2.2

任意の G の 0 分散彩色数は 1，∞ 分散彩色数は G の連結成分の位数である。

$d=1$ の場合，
$\chi(\mathscr{G}(\varDelta),1) = \omega(\mathscr{G}(\varDelta)) = \Delta(\mathscr{G}(\varDelta))+1 = \varDelta+1.$
$\chi(\mathscr{H}(\varDelta),1) = \omega(\mathscr{H}(\varDelta)) = \min\{\, \varDelta+1\,,\, 4 \,\}.$

$\varDelta \le 2$ の場合は，$\mathscr{G}(\varDelta) = \mathscr{H}(\varDelta)$ である。$\mathscr{G} = \mathscr{G}(\varDelta)$ の時，式 (1)(2) は等号が成り立ち，$\chi(\mathscr{G}(0),d) = 1$，$\chi(\mathscr{G}(1),d) = \min\{\, d\,,1 \,\}+1$，$\chi(\mathscr{G}(2),d) = 2d+1$ 。

2.3

$d \ge 2$ のとき，

$$\chi(G,d) {\le} k \ \wedge\ d_G(v,w){=}d{-}1 \ \Rightarrow\ d(v) \le k{-}d{+}1.$$

G が連結グラフなら，

$$\chi(G,d) \ge \max\{\, d(v) + \min\{\, \epsilon(v)\,,\, d{-}1 \,\} \mid v \in G \,\}.$$
$$\Delta(G) \ge k{-}d{+}1 \ \wedge\ \mathrm{rad}(G) \ge d{-}1 \ \Rightarrow\ \chi(G,d) \ge k.$$
$$\delta(G) \ge k{-}d{+}1 \ \wedge\ \mathrm{diam}(G) \ge d{-}1 \ \Rightarrow\ \chi(G,d) \ge k.$$

2.4

どの頂点の次数も $\varDelta$ 以下の木を全て集めた集合を $\mathscr{T}(\varDelta)$ とおくと，以下が成り立つ。

$$\Delta(\mathscr{T}^d(\varDelta)) = \sum_{i=1}^{d} \varDelta(\varDelta{-}1)^i = \frac{\varDelta(\varDelta{-}1)^n - \varDelta}{\varDelta-2} \tag{3}$$

$$\omega(\mathscr{T}^{2n}(\varDelta)) {=} \sum_{i=1}^{n-1} \varDelta(\varDelta{-}1)^i + 1 = \frac{\varDelta(\varDelta{-}1)^n {-} 2}{\varDelta-2} \tag{4a}$$

$$\begin{aligned}\omega(\mathscr{T}^{2n+1}(\varDelta)) &= \sum_{i=1}^{n-1} \varDelta(\varDelta{-}1)^i + (\varDelta{-}1)^{n-1} + 1 \\ &= \frac{(\varDelta^2 - 2)(\varDelta-1)^{n-1} - 2}{\varDelta-2}\end{aligned} \tag{4b}$$

$$\forall T \in \mathscr{T},\ \forall d {\in} \mathbb{N},\ \chi(T,d) = \omega(T^d).$$
$$\chi(\mathscr{T}(\varDelta),d) = \omega(\mathscr{T}^d(\varDelta)).$$

3 $\chi(\mathscr{G}(\varDelta),d)\,,\,\chi(\mathscr{H}(\varDelta),d)$ の上界

3.1

$\Delta(\mathscr{G}^d(\varDelta)) = \Delta(\mathscr{T}^d(\varDelta)) = \Delta(\mathscr{H}^d(\varDelta))$ 。(2)(3) より
$\chi(\mathscr{H}(\varDelta),d) \le \chi(\mathscr{G}(\varDelta),d) \le \Delta(\mathscr{T}^d(\varDelta)) + 1 \sim \varDelta^d.$

3.2

$\mathscr{H}(\varDelta)$ に属するグラフは，その頂点にうまく番号をつけると，全ての点で，自分より番号の小さい点のうち，隣接する点が 5 つ以下，かつ距離 $\forall d \ge 2$ の点が $(2\varDelta+19)(\varDelta-1)^{d-2}$ 以下となる。

$$\chi(\mathscr{H}(\varDelta),d) \le 6 + \sum_{i=2}^{d} (2\varDelta+19)(\varDelta-1)^{i-2}.$$

4 $\chi(\mathscr{G}(\varDelta),d)\,,\,\chi(\mathscr{H}(\varDelta),d)$ の下界

4.1

$\mathscr{T} \subset \mathscr{H}(\varDelta)$ 。(1)(4a)(4b) より，$d \ge 2$ のとき，
$\chi(\mathscr{G}(\varDelta),d) \ge \chi(\mathscr{H}(\varDelta),d) \ge \omega(\mathscr{T}^d(\varDelta)) \sim \varDelta^{\lfloor d/2 \rfloor}.$

4.2

最大次数が $\varDelta$ かつ直径が d のグラフがあれば，$\chi(\mathscr{G}(\varDelta),d)$ はそのグラフの位数以上と分る。そこで，次のようなグラフ $G_d(\varDelta)$ を考える。

$G_1(\varDelta)$ は，位数 $\varDelta{+}1$ の完全グラフ $K_{\varDelta+1}$ とする。既に定義されたグラフから，以下の様に，より直径の大きなグラフをつくると，任意の d と $\varDelta$ で，$\Delta(G_d(\varDelta)){=}\varDelta$，$\mathrm{diam}(G_d(\varDelta)) = d$ である。

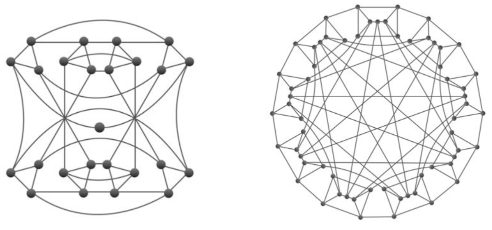
$\varDelta{-}x{+}1$ 個の $G_d(x)$ と，更に $\varDelta{-}\delta(G_d(x))$ 個の点を繋いで，$G_{d+1}(\varDelta)$ を作る。$G_d(x)$ の点には $\varDelta{-}x$ ずつ辺が足される。$d=3, \varDelta=4, x=3$ のとき，$d=1, \varDelta=6, x=3$ のときの例に，図 1(a), 3(a) のグラフがある。

$$|G_{d+1}(\varDelta)| = (\varDelta - x + 1)|G_d(x)| + \varDelta - \delta(G_d(x))\,.$$

$x(\varDelta{-}x)$ 個の $G_d(x)$ に，各点の次数が $\varDelta$ になるまで辺を加え，$G_{2d+1}(\varDelta)$ を作る。$d=2, \varDelta=4$ で $x=3$ とすると，図 1(b) の様なグラフができる。図 2(a),2(b),2(c) も $\varDelta=4$ の例で，全て $d=1$，x は順に $1,2,3$。

$$|G_{2d+1}(\varDelta)| = |G_d(x)|\big(\textstyle\sum_{v\in G_d(x)}(\varDelta - d(v)) + 1\big)\,.$$

$\lim_{\varDelta\to\infty} \frac{|G_d(\varDelta)|}{\varDelta^d} > 0$ であるような $G_d(\varDelta)$ を作ることができる。$\chi(\mathscr{G}(\varDelta), d) \in \Omega(\varDelta^d)$。



(a) 直径 4, 位数 25　　(b) 直径 5, 位数 63

図 1: 最大次数が 4 のグラフ

$\mathbb{N}_n := \{\,1,\ldots,n\,\}$, $\mathrm{l}(n) := n - 2\lfloor n/2\rfloor$ とおく。

$G_2(\varDelta)$ は，$K_{\lfloor\varDelta/2\rfloor}$ を繋いで作られたものの位数が最も大きい。そのグラフは次の様に表せる。

$V(G_2(d)) = \mathbb{N}_{\lceil d/2\rceil+1} \times \mathbb{Z}_{\lfloor d/2\rfloor+1} \cup \{0\} \times \mathbb{N}_{\lceil d/2\rceil}$

$E(G_2) = \{(i,k)(j,l) \in \binom{V(G_2)}{2} \mid i{=}j \vee k{=}l{\neq}0 \vee i{=}k{=}0)\}$

$G_3(\varDelta)$ は，$K_{\varDelta-1}$ から作る場合，位数は $\varDelta^2{+}\varDelta$ で，

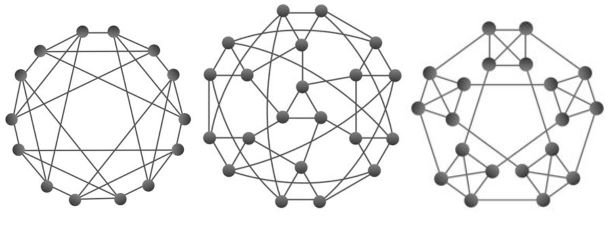
$V(G_3(\varDelta)) = \{\,(i,k) \in \mathbb{N}^2_{\varDelta+1} \mid i \neq k\,\}$,

$E(G_3) = \{\,(i,k)(j,l) \in \binom{V(G_3)}{2} \mid i{=}j \vee (i,k){=}(l,j)\,\}$

と定義できる。$|G_3(\varDelta)|$ は，繋ぐ完全グラフの位数が $\big(\varDelta{-}2{+}\sqrt{(\varDelta{+}1)^2{+}3}\big)/3$ に一番近い時に最大になる。

$$\chi(\mathscr{G}(\varDelta), 2) \geq \frac{1}{4}\varDelta^2 + \frac{3}{2}\varDelta + 1 + \frac{\mathrm{l}(\varDelta)}{4}\,.$$

$$\chi(\mathscr{G}(\varDelta), 3) > \frac{2(\varDelta{+}1)^3 + (\varDelta{+}1)^2\sqrt{(\varDelta{+}1)^2{+}3}}{3^3}$$



(a) 位数 14　　(b) 位数 21　　(c) 位数 20

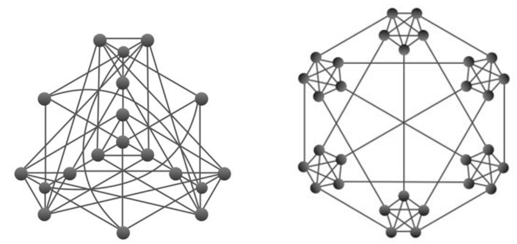
図 2: 直径 3, 最大次数 4 のグラフ

4.3

$\varDelta{\geq}4$ について，次の様に $H_2(\varDelta), H_3(\varDelta)$ を定める。

$$V(H_2(2m)) := \mathbb{N}_3 \times \mathbb{Z}_m + (2,m)$$
$$V(H_2(2m{+}1)) := \mathbb{N}_3 \times \mathbb{Z}_{m+1} - (1,m)$$
$$E(H_2) := \{\,(i,0)(j,l) \mid i \neq j\,\} - (1,0)(3,0)$$

$$V(H_3(2m)) := \{\,v_i^k \mid (i,k) \in \mathbb{N}_3 \times \mathbb{Z}_m\,\} \cup \{\,w_i^k \mid (i,k) \in \mathbb{N}_3 \times \mathbb{Z}_{2m-3}\,\} - w_2^{2m-3}$$



(a) 最大次数 6, 位数 19　　(b) 最大次数 5, 位数 30

図 3: 直径 2 のグラフと 3 のグラフ

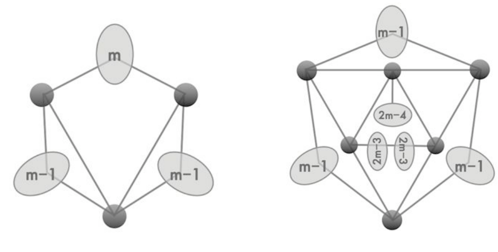


図 4: $H_2(2m)$ と $H_3(2m)$

$$V(H_3(2m{+}1)) := \{\,v_i^k \mid (i,k) \in \mathbb{N}_3 \times \mathbb{Z}_m\,\} + v_2^m \cup \{\,w_i^k \mid (i,k) \in \mathbb{N}_3 \times \mathbb{Z}_{2m-2}\,\} - w_2^{2m-2}$$

$$E(H_3) := \{\,v_i^0 v_j^l \mid i \neq j\,\} \cup \{\,v_i^0 w_j^0 \mid i \neq j\,\} \cup \{\,w_i^0 w_j^0 \mid i{-}j{=}1\,\} \cup \{\,w_i^0 w_i^l \mid l \neq 0\,\} \cup \{\,w_1^k w_3^k\,\}$$

そして，$H_d(\varDelta)$ の各点 v に新しく $\varDelta - d(v)$ ずつ距離 1 の点を加えたグラフを $H_{d+2}(\varDelta)$ とすることで，直径が d，最大次数が $\varDelta$ の平面的グラフの集合 $\{\,H_d(\varDelta) \mid 2 \leq d \in \mathbb{N},\ 4 \leq \varDelta \in \mathbb{N}\,\}$ ができる。

$\varDelta = 3$ の場合は，$G_2(3)$, $G_3(3) \in \mathscr{H}(3)$ なので，これから同様に $H_d(3)$ をつくると，

$$\chi(\mathscr{H}(3), 2n) \geq |H_{2n}(3)| = 7 \cdot 2^{n-1}.$$
$$\chi(\mathscr{H}(3), 2n{+}1) \geq |H_{2n+1}(3)| = 4 \cdot 2^n.$$

$\varDelta \geq 4$ の時，$H_d(\varDelta)$ の位数は，次のように $\varDelta$ と d で表される。これは $\chi(\mathscr{H}(\varDelta), d)$ の一つの下界である。

$$|H_{2n}(\varDelta)| = 3 + \Big(\frac{3}{2}\varDelta - 2 - \frac{\mathrm{l}(\varDelta)}{2}\Big)(\varDelta - 1)^{n-1}.$$

$$|H_{2n+1}(\varDelta)| = (5\varDelta - 8)/(\varDelta - 2) + \left(\frac{7\varDelta - 18 - \mathrm{l}(\varDelta)}{2} + \frac{(\varDelta - 1)(\varDelta - 4)}{\varDelta - 2}\right)(\varDelta - 1)^{n-1}.$$

$$\chi(\mathscr{H}(\varDelta), d) \geq |H_d(\varDelta)| \sim \begin{cases} \dfrac{3}{2}\varDelta^{\lfloor d/2\rfloor} & (d = 2n) \\ \dfrac{9}{2}\varDelta^{\lfloor d/2\rfloor} & (d = 2n{+}1) \end{cases}$$

5　まとめと今後の課題

グラフの分散彩色数ついて，特に，彩色するグラフの頂点の次数の上限から，その大まかな範囲を求めた。今後，より良い評価と，他の条件についても考察することなどを目標としている。

参考文献

[1] Jan van Heuvel and Sean McGuinness, *Coloring the Square of a Planar Graph*, 2002 Wileu Periodicals, Inc. J Graph Theory 42: 110-124, 2003.