自由確率空間におけるモーメント-キュムラント公式の応用

戸塚麻衣　(指導教員：吉田裕亮)

1　非可換確率空間と独立性

通常の確率空間 (Ω, Σ, μ) は, 基礎空間 Ω, σ- 代数 Σ と確率測度 μ からなる 3 つ組である．確率変数とは $f : \Omega \to \mathbb{C}$ なる可測関数で, f が可積分ならば期待値は $E(f) = \int_\Omega f d\mu$ と与えられる．ここで関数環 $L^\infty(\Omega, \mu)$ (これは可換な Banach 代数) と E の組を考える．この組 $(L^\infty(\Omega, \mu), E)$ には, 元の確率空間を復元するに足る情報が含まれている．このことより, 一般に単位元を含む非可換な Banach 代数 A とその上の $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ なる線型汎関数の組 (A, φ) を非可換確率空間と考える．このとき, A の元は確率変数を, φ は期待値を与える．

通常の独立性を非可換の枠組みに導入することは可能である．これは, 代数的にはテンソル積を考えることにより実現されるが, この場合, 独立な確率変数達は互いに可換であることが要求され, 非可換確率論とは名ばかりになる．そこで Voiculescu は真に非可換性が反映された新たな独立性, 自由独立性 (free independence) を導入した．これは代数的には自由積に基づく概念で, 自由という名はこれに由来する．

2　自由合成積

通常の確率空間で独立な確率変数の和の分布は, 合成積で与えられる．形式的な Fourier 変換の対数に対応するものはキュムラントと呼ばれ, これは合成積を線形化する．自由確率論においても, 自由独立な確率変数の和の分布を求める道具として, 自由キュムラントが導入されている．もちろん, この自由キュムラントも自由独立な確率変数の和 (自由合成積) を線形化する．

分布 ν に対して, ν の G-変換は ζ^{-1} の形式的べき級数

$$G_\nu(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu(X^k)}{\zeta^{k+1}}$$

で与えられる．実数上の確率分布 ν の Stieltjes 変換

$$G_\nu(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\zeta - t} d\nu(t)$$

に他ならないことに注意する．また, 分布 ν のモーメント級数とは, 形式的べき級数

$$M_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu(X^k) z^k$$

のことであり, G-変換 $G_\nu(\zeta)$ との間には

$$M_\nu(z) = \frac{1}{z} G_\nu\Big(\frac{1}{z}\Big)$$

の関係にある．G-変換から以下の関数方程式で, R-変換 R_ν を定義する．すなわち,

$$\frac{1}{G_\nu(z)} = z - R_\nu\big(G_\nu(z)\big)$$

である．この G-変換と R-変換は互いに一意に定まる．この R-変換は自由独立な確率変数 x_1, x_2 に対して,

$$R_{\nu_{x_1+x_2}}(z) = R_{\nu_{x_1}}(z) + R_{\nu_{x_2}}(z)$$

が成り立ち, 自由合成積を線形化する．すなわち R-変換は自由版のキュムラント母関数と考えられる．

この R-変換は確率変数のダイレーションとシフトに関して, 通常のキュムラント級数と同様に, 以下のような性質を持っている．

$$\begin{aligned} R_{\nu_{\alpha x}}(z) &= \alpha R_{\nu_x}(\alpha z), \\ R_{\nu_{x+m\cdot\mathbf{1}}}(z) &= R_{\nu_x}(z) + m. \end{aligned}$$

3　モーメント・キュムラント公式

通常の確率論において, 確率測度 μ の n 次モーメントを $m_n(\mu)$ として

$$M_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(\mu)}{n!} z^n,$$

$$C_\mu(z) = \log M_\mu(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n(\mu)}{n!} z^n$$

とおくと m_n は $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の式で表わされることが知られている．いわゆるモーメント・キュムラント公式である．これは, 組み合わせ論的には, 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の分割全体 $\mathcal{P}(n)$ のなす束が対応する．しかたっがて, Möbius の反転公式より, 逆の対応, すなわちキュムラントをモーメントを用いて表わすことも可能であり, モーメント列 $\{m_n\}$ とキュムラント列 $\{\alpha_n\}$ は互いに他を決定する．　自由確率論においても, Speicher は, 先の G-級数と R-級数との関係の組み合わせ論的考察により, 自由モーメント・キュムラント公式を与えた．これにより対応する束が, 非交差分割 $\mathcal{NC}(n)$ に制限されることが示された．これを厳密に書き下すと以下のようになる．

モーメント・キュムラント公式

n 次モーメント m_n は n 次以下の自由キュムラント $\{r_i\}_{i=1}^n$ の積の和で, 以下のように展開される．

$$m_n = \sum \frac{n!}{i_0!} \frac{r_1^{i_1}}{i_0!} \frac{r_2^{i_2}}{i_2!} \cdots \frac{r_n^{i_n}}{i_n!}$$

ここで, 和は以下を満たす全ての非負の整数 $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_n$ に関する和を取る．

$$i_0 + i_1 + i_2 + \cdots + i_n = n + 1$$
$$1 \cdot i_1 + 2 \cdot i_2 + 3 \cdot i_3 + \cdots + n \cdot i_n = n$$

これは, 組み合わせ論的には, 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の非交叉分割全体 $\mathcal{NC}(n)$ も束をなすので, Möbius の反転公式より, 逆の対応, すなわちキュムラントをモーメ

ントを用いて表わすことも可能である．これも, 以下のように厳密に書き下せることが示されている．

キュムラント・モーメント公式

n 次の自由キュムラント r_n は n 次以下のモーメント $\{m_i\}_{i=0}^{n}$ の積の和で, 以下のように展開される．

$$r_n = \sum (-n)_{\ell-1} \frac{m_1^{j_1}}{j_1!} \frac{m_2^{j_2}}{j_2!} \frac{m_3^{j_3}}{j_3!} \cdots \frac{m_n^{j_n}}{j_n!}$$

ただし, $(x)_p = x(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)$ である．ここで, 和は以下を満たす全ての非負の整数 $j_1, j_2, \ldots, j_n$ に関する和を取る．

$$1\cdot j_1 + 2\cdot j_2 + 3\cdot j_3 + \cdots + n\cdot j_n = n$$
$$j_1 + j_2 + \cdots + j_n = \ell$$

4 組み合わせ公式への応用

本研究においては, 先の自由キュムラント・モーメント公式を　Bernoulli 分布に適用することにより, 幾つかの組み合わせ公式の導出を行った．

Bernoulli 分布とは 2 点に Dirac 質点を持つ, 以下のような分布である．

$$d\nu = (1-p)\delta_0 + p\delta_1 \quad (0 < p < 1).$$

この Stieltjes 変換, すなわち G-変換は

$$G_B(\zeta) = \frac{1-p}{\zeta} + \frac{p}{\zeta-1} = \frac{z-(1-p)}{\zeta(\zeta-1)}$$

である．これより, 自由キュムラント級数である R-変換を関数方程式を解くことにより求めると,

$$R_B(z) = \frac{(z-1) + \sqrt{(z-1)^2 + 4(1-p)z}}{2z}$$

となる．ただし, 平方根の分枝は $z=0$ が除去可能な特異点となるように取られる．この展開

$$R_B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n z^{n-1}$$

の z^{n-1} の係数, すなわち n 次の自由キュムラント r_n を厳密に求めるために Laglange inversion theorem を援用する．

Laglange inversion theorem

母関数 $A(z) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ が, 以下の関数等式を満たすと仮定する．

$$A(z) = 1 + zH\big(A(z)\big),$$

ただし, $H(t)$ は t の多項式である．このとき λ の任意の多項式 $G(\lambda)$ と $n \geq 1$ に対して

$$[z^n]G\big(A(z)\big) = \frac{1}{n}[\lambda^{n-1}]G'(1+\lambda)\big(H(1+\lambda)\big)^n$$

が成り立つ．ここで, $[z^n]M(z)$ とは $M(z)$ の展開における z^n の係数を表わす．

Bernoulli 分布の自由キュムラント級数 $R_B(z)$ は

$$A(z) = R_{Be}(z) + p$$
$$H(t) = -t^2 + (2p+1)t - p^2 - p$$

置くことにより Laglange inversion theorem の仮定が満たされることが分かる．したがって, 多項式 $G(\lambda) = \lambda$ として $R_B(z)$ の z^{n-1} の係数, すなわち n 次の自由キュムラントは

$$[z^{n-1}]A(z) = \frac{1}{n-1}[\lambda^{n-2}]\big(H(1+\lambda)\big)^{n-1}$$

で与えられると言える．ここで,

$$H(1+\lambda) = -(\lambda - p + 1)(\lambda - p)$$

であることに注意すると, やや煩雑な計算の後に, 以下のような結果を得る．

$$\big(H(1+\lambda)\big)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sum_{j=0}^{n-1+k} \binom{n-1+k}{j} \lambda^j (-p)^{n-1+k-j}$$

ここから λ^{n-2} の係数を抽出することにより, Bernoulli 分布の n 次自由キュムラント r_n として

$$r_n = \frac{1}{n-1}(-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{n-1+k}{n-2} p^{k+1}$$

が得られる．

一方, Bernoulli 分布の n 次モーメントについて, 明らかに $m_n = p$ $(n \geq 1)$ である．よって, 自由モーメントキュムラント公式より

$$r_n = \sum \frac{(-n)_{\ell-1}}{j_1! j_2! \cdots j_n!} p^{\ell}$$

である．したがって, p のベキの係数を比較することにより, 以下のような組み合わせ公式を得る．

5 定理

$k = 0, 1, \ldots, n-1$ について,

$$\sum \frac{(-n)_k}{j_1! j_2! \cdots j_n!} = \frac{1}{n-1}(-1)^{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{n-1+k}{n-2}$$

ただし, $(x)_p = x(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)$ で, 左辺の和は以下を満たす全ての非負の整数 $j_1, j_2, \ldots, j_n$ に関する和を取る．

$$1\cdot j_1 + 2\cdot j_2 + 3\cdot j_3 + \cdots + n\cdot j_n = n$$
$$j_1 + j_2 + \cdots + j_n = k+1$$

上の等式は, 良く知られた組み合わせ公式 ($k = n-1$ のとき等) を含む, 広いクラスの等式を与えることになる．また, ここで用いた手法は自由複合 Poisson 分布との関連で他の分布にも拡張可能な手法でもある．